

Sciences industrielles

CPGE 1^{re} année



Systemes asservis



Sommaire

1	Consigne	5
1.1	Consignes unitaires	5
2	Modéliser un SLCI	6
2.1	Fonction de transfert	6
	Hypothèses	6
	Transformée de Laplace	7
	Fonction de transfert	8
	Forme canonique	9
2.2	Prévoir le comportement en stabilité	10
	Condition de stabilité	10
2.3	Prévoir le comportement en rapidité	10
2.4	Prévoir le comportement en précision	10
	Détermination de l'erreur en régime permanent	10
3	Schéma-bloc	11
3.1	Système asservi	11
3.2	Consigne et réponse	12
3.3	Structure d'un système asservi	12
3.4	Chaîne directe et chaîne de retour	13
3.5	IHM	14
3.6	Modèle de connaissance	14
3.7	Simplifier un schéma-bloc	15
	Blocs en série	15
	Blocs en parallèle	15
	Fonction de transfert en boucle fermée : FTBF	15
	Fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO ⁽¹⁾	15
4	SLCI asservi perturbé	17
4.1	Perturbation	17
4.2	Schéma-bloc d'un système perturbé	17
4.3	Théorème de superposition	17
4.4	Stabilité d'un modèle perturbé	18
4.5	Précision d'un modèle perturbé	18
4.6	Schéma-bloc équivalent	19
5	Performances d'un système et performances d'un système asservi	20
5.1	Notations	20
5.2	Stabilité des systèmes	20
5.3	Rapidité des systèmes	21
5.4	Précision des systèmes asservis	22
5.5	Cas général écart statique d'un système non perturbé	23
6	Prévoir la réponse à un échelon	24
6.1	Modèle proportionnel	24
6.2	Modèle intégrateur	24
6.3	Modèle dérivateur	24
6.4	Réponse indicielle du 1 ^{er} ordre	25
6.5	Réponse à une rampe du 1 ^{er} ordre	26
6.6	Modèle du 2 ^e ordre	26
	$z > 1$ Régime apériodique (non oscillatoire amorti)	26
	$z = 1$ Régime apériodique critique	26
	$0 < z < 1$ Régime pseudo-périodique (oscillatoire amorti)	26
7	Identifier un modèle de comportement	29
7.1	Méthodologie	29
7.2	Identification temporelle d'un 1 ^{er} ordre	30

7.3	Identification temporelle d'un 2 ^e ordre pseudo-périodique	30
7.4	Identification temporelle d'un 2 ^e ordre apériodique	32
7.5	Réduction de l'ordre d'un modèle	32
8	Analyse fréquentielle	33
8.1	Caractéristiques	33
8.2	Diagramme de Bode	34
8.3	Gain et phase	35
8.4	Filtre, pulsation de coupure et bande passante	36
8.5	Stabilité à partir du diagramme de Bode	37
8.6	Rapidité à partir du diagramme de Bode	37
8.7	Précision à partir du diagramme de Bode	37
9	Réponse fréquentielle	37
9.1	Modèle proportionnel	37
9.2	Modèle intégrateur	37
9.3	Modèle intégrateur de degré 2	37
9.4	Modèle dérivateur	38
9.5	Modèle du 1 ^{er} ordre	38
9.6	Modèle du 1 ^{er} ordre inverse	38
9.7	Modèle du 2 ^e ordre	39
	Résonance, pulsation de résonance et facteur de surtension	40
	Cas particulier où $z > 1$	40
9.8	Cas général	41
	Propriétés des diagrammes de Bode	41
9.9	Méthodologie	41
	Méthode de tracé d'un diagramme de Bode	41
	Méthode pour identifier un diagramme de Bode	42
9.10	Bilan du comportements temporel et fréquentiel d'un modèle du 2 ^e ordre	42
	Facteur d'amortissement	42
	Gain	42
	Pulsations	42
9.11	FTBO et FTBF	43
9.12	Conditions de stabilité – critère graphique	43
	Point critique	43
	Critère du revers dans le plan de Black – hors programme	44
9.13	Marge de phase et marge de gain des systèmes asservis	44
	QUESTIONS DE COURS	46

On a vu précédemment que les échanges entre la chaîne d'information et la chaîne de puissance, sous la forme de commande et de grandeur physique acquise, permettent à certaines activités d'un système d'être réalisées de manière relativement autonome. On parle de **système automatisé**.

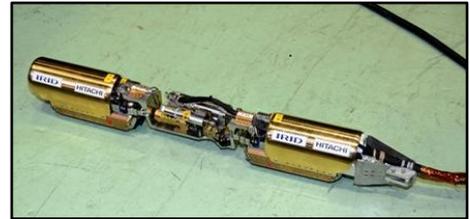
L'**automatique** est l'**étude** de la **commande** des **chaînes de puissance**.

Ces derniers sont utilisés pour réaliser des tâches :

- **complexes** ou **dangereuses** pour l'homme ;



Correction de la vue par laser



Robot serpent Tepeco d'inspection du cœur d'une centrale nucléaire

- **répétitives** ou **pénibles**.



Robots guides d'un complexe financier Santander de Madrid



Voiture autonome Tesla

L'intervention de l'homme est alors limitée à la **programmation** de l'unité de commande, la mise en marche et les **réglages** de certains **paramètres**.

À partir du **modèle du système** étudié, sous forme équationnelle, il s'agira d'**évaluer ses performances** dans le but d'anticiper son comportement réel et vérifier ainsi s'il est capable de répondre aux **exigences** de son **cahier des charges**.

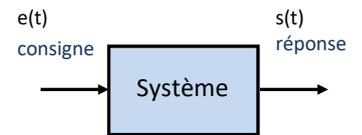
Notons enfin que, bien que de nombreux systèmes utilisent actuellement des échanges et un traitement des informations sous forme numérique, on limitera nos études uniquement aux cas des systèmes continus.

Dans un système **continu**, les **grandeurs d'entrée** et de **sortie** évoluent de manière **continue** en fonction du **temps**, il s'agit donc de grandeurs analogiques.

1 Consigne

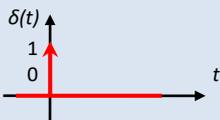
1.1 Consignes unitaires

Les performances d'un système sont évaluées expérimentalement, ou prédites par simulation, lorsque le système est soumis à des **signaux tests $e(t)$ en entrée** appelés **signaux canoniques**.

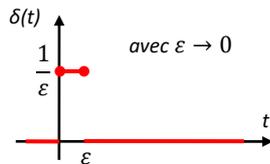


Ces signaux tests envoyés en entrée sont :

(1) Lorsque ε tend vers 0, la fonction devient une distribution. On parle alors d'impulsion de Dirac qui se note $\delta(t)$.

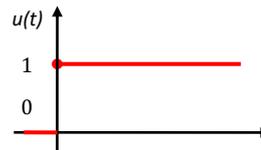


- **L'impulsion⁽¹⁾** : entrée très brève



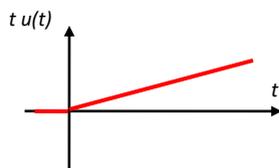
Air bag

- **L'échelon⁽²⁾** : entrée constante



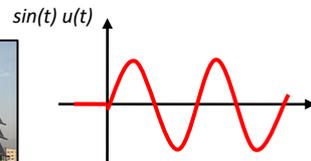
Thermostat

- **La rampe** : entrée linéaire



Tracker solaire

- **La sinusoïde** : signaux périodiques



Suspension

(2) On parle aussi :

- d'échelon unitaire
- d'échelon d'amplitude 1
- d'échelon indiciel
- d'échelon de Heaviside
- de fonction unité

Elle se note $u(t)$.

Une réponse indicielle est une réponse à un échelon indiciel.

Par convention, tous ces signaux sont nuls pour t négatif : $e(t) = 0$ pour $t < 0$

Notons toutefois que les performances sont **intrinsèques** au système et **ne dépendent pas du type d'entrée appliqué**.

La rampe est la **primitive** de l'échelon qui est la **primitive** de l'impulsion. On pourrait le généraliser par intégration successive.
L'entrée sinusoïdale se généralise en entrée harmonique.

2 Modéliser un SLCI

Pour **prédire** les performances d'un système, il faut d'abord en avoir un **modèle**.

2.1 Fonction de transfert

Hypothèses

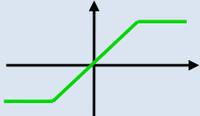
Le modèle utilisé suppose le **Système Linéaire, Continu et Invariant** : **SLCI**.

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :

- le système est **linéaire**⁽¹⁾, c'est-à-dire que la sortie est une combinaison linéaire des réponses aux signaux d'entrée. Pour un signal d'entrée $e(t) = e_1(t) + k e_2(t)$, la réponse est $s(t) = s_1(t) + k s_2(t)$;
- les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière **continue** avec le temps ;
- le système est **invariant**⁽²⁾, c'est-à-dire qu'il reste identique et valable à chaque instant durant la période d'étude.

(1) Exemples de non linéarité :

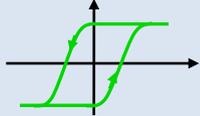
- saturateur (à l'entrée d'un MCC...)



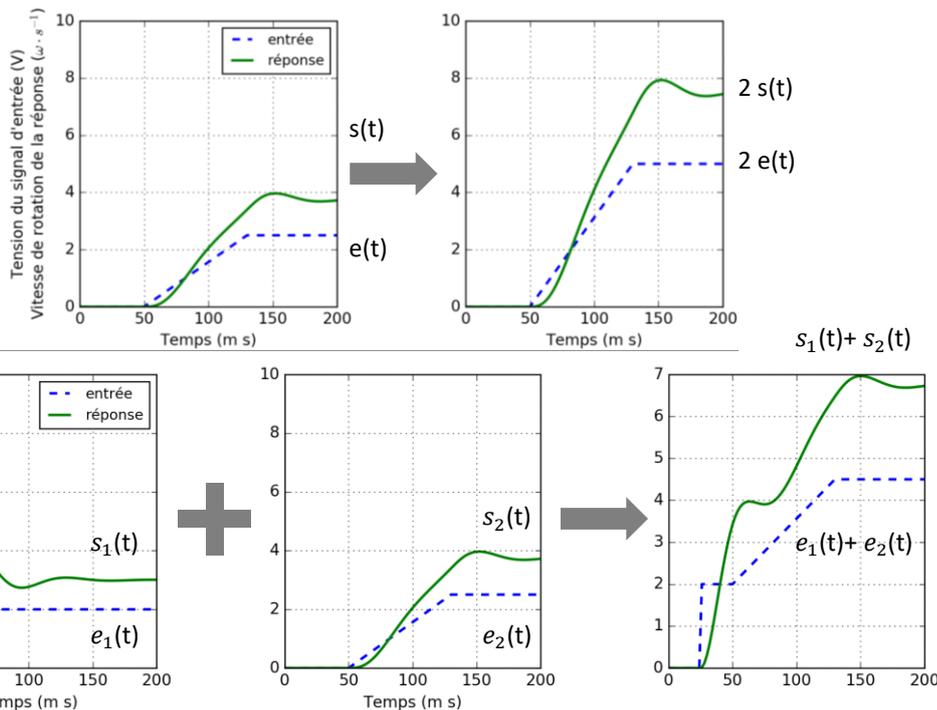
- seuil (frottement, quantification...)



- hystérésis (matériaux...)



(2) L'usure de certaines pièces, par exemple, peut se traduire par des évolutions des lois de comportement au cours du temps, qui ne sont pas prises en compte.



Un SLCI est modélisé par des **équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

$e(t)$: entrée et $s(t)$: sortie

n est l'**ordre** du modèle. C'est le degré de l'équation différentielle.

Pour des raisons liées à la causalité (le comportement d'un système dépend du passé, pas du futur), les systèmes réels étudiés imposent $m \leq n$.

Ce modèle mathématique a été déterminé par application de lois et principes de la physique : il est dit « **modèle de connaissance** », en opposition au « **modèle de comportement** » déterminé expérimentalement.

Transformée de Laplace

Intérêt

Les équations différentielles d'un modèle de connaissance ne permettent pas de caractériser le comportement du modèle uniquement par ses paramètres, et indépendamment des grandeurs d'entrée et de sortie.

La transformée de Laplace donne une réponse à ce problème en transformant les équations différentielles en polynômes afin de modéliser le système uniquement par ses paramètres.

Définition

Une fonction $f(t)$ nulle pour $t < 0$ est dite causale⁽¹⁾.

Soit f une fonction causale d'une variable réelle t . On définit sa transformée⁽²⁾ de Laplace $\mathcal{L}(f)$ comme l'unique fonction F de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L} f(t) \mapsto F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3)(4)$$

Domaine temporel Domaine symbolique (ou de Laplace)

Propriétés de la transformée de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de déterminer facilement les transformées de Laplace des équations du modèle de connaissance.

	LINEARITE	DERIVATION	INTEGRATION
$f(t)$	$K_1 \cdot f(t) + K_2 \cdot g(t)$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\int\int\int_{n \text{ fois}} f(u)$
$F(p)$	$K_1 \cdot F(p) + K_2 \cdot G(p)$	$p^n F(p)$	$\frac{F(p)}{p^n}$
avec conditions initiales nulles			

Démonstration par IPP :

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = \int_0^{+\infty} \dot{f}(t)e^{-pt} dt = - \int_0^{+\infty} -p f(t)e^{-pt} dt + [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} = pF(p) - f(0^-) \quad (5)$$

Les **conditions initiales sont supposées nulles**⁽⁶⁾. C'est-à-dire, que la fonction et ses dérivées sont nulles pour $t \leq 0$:

$$f(0) = 0 ; f'(0) = 0 ; f''(0) = 0 ; \dots$$

Ce sont les **conditions de Heaviside**.

On en déduit :

Consigne	Impulsion	Échelon	Rampe	Sinus	Cosinus	Sinus amortie	Retard ⁽⁸⁾
$e(t)$	$\delta(t)$	$E_0 u(t)$	$V_0 t u(t)$	$\sin(\omega t) u(t)$	$\cos(\omega t) u(t)$	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$f(t - T)$
$E(p)^{(7)}$	1	$\frac{E_0}{p}$	$\frac{V_0}{p^2}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-Tp} F(p)$

Démonstrations :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-pt} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon p} (e^{-p\varepsilon} - 1) \approx -\frac{1}{\varepsilon p} (1 - p\varepsilon - 1) \approx 1$$

$$\mathcal{L}(E_0 u(t)) = \int_0^{+\infty} E_0 e^{-pt} dt = E_0 \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = - \left(-\frac{E_0}{p} \right) = \frac{E_0}{p}$$

$$\mathcal{L}(V_0 t u(t)) = \int_0^{+\infty} V_0 t e^{-pt} dt = V_0 \left[\left(-\frac{1}{p} t - \frac{1}{p^2} \right) e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = - \left(-\frac{V_0}{p^2} \right) = \frac{V_0}{p^2}$$

$$\mathcal{L}(f(t - T)) = \int_0^{+\infty} f(t - T) e^{-pt} dt = \int_T^{+\infty} f(u) e^{-p(u+T)} du = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-pu} du e^{-Tp} = e^{-Tp} F(p)$$

On pose $u = t - T$

(1) L'ingénieur a pour pratique d'étudier l'effet d'une cause qu'il situe à la date $t=0$. La cause précédant toujours l'effet, la transformée de Laplace n'est définie que pour des fonctions dites « causales ».

(2) Une transformée transforme une fonction en une autre fonction.

(3) Where the Laplace Transform comes from, Arthur Mattuck, MIT : <https://sciencesindustrielles.com/glossary/transformation-de-laplace/>



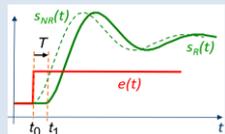
(4) Cette intégrale converge car les entrées sont des polynômes ou sont bornées.

(5) Dans le cas général : $\mathcal{L}'(f(t)) = pF(p) - f(0^-)$
Ce qui veut dire que si les conditions initiales ne sont pas nulles, la réponse est "translatée" de la valeur initiale.

(6) Les conditions initiales du problème de Cauchy sont nulles.

(7) On remarque qu'il y a un lien de dérivé entre $\frac{1}{p^2}$ et 1.

(8) Théorème du retard :



Le retard pur peut modéliser des phénomènes de traitements numériques, des délais de transmission de l'information, ou des écoulements de fluide.

(1)  Fonctionnement du MCC : <https://sciencesindustrielles.com/glossary/moteur-electrique/>



(2) Tension aux bornes du moteur en fonction des grandeurs électriques.

(3) La vitesse de rotation du moteur est proportionnelle à la force contre électromotrice f.c.e.m, c'est-à-dire la tension aux bornes du rotor.

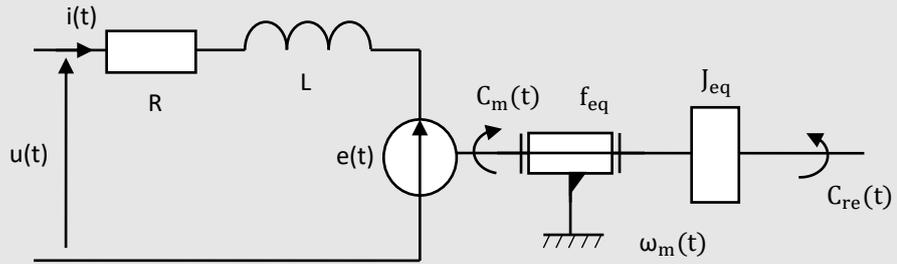
m comme moteur e comme électrique

(4) Le couple moteur est proportionnel à l'intensité. Ce qui veut dire que contrôler le courant c'est contrôler les efforts du système.
c comme couple

(5) PFD pour un mouvement de rotation. res comme résistant eq comme équivalent

(6) Par linéarité de la transformée de Laplace.

Exemple : On donne la modélisation du MCC⁽¹⁾ ci-dessous. Déterminer la transformée de Laplace des équations du MCC



Equation électrique :

Loi des mailles et loi d'Ohm : $u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) + e(t)$ (2)

Equations de couplage :

Maxwell-Faraday : $e(t) = K_e \omega_m(t)$ (3)

Couple moteur engendrée par la Force de Laplace :

$c_m(t) = K_c i(t)$ (4)

Equation mécanique :

Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'arbre moteur :

$c_m(t) - c_{res}(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt}(t) + f_{eq} \omega_m(t)$ (5)

On supposera les conditions de Heaviside respectées. $i(0^-) = 0 \text{ A}$; $\omega_m(0^-) = 0 \text{ rad/s}$

Et on prendra une charge nulle $c_{res}(t) = 0$.

Hypothèse : Les conditions initiales sont nulles.

$\mathcal{L}(u(t)) = \mathcal{L}(R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) + e(t))$

$\Rightarrow \mathcal{L}(u(t)) = R \mathcal{L}(i(t)) + L \mathcal{L}(\frac{di}{dt}(t)) + \mathcal{L}(e(t))$ (6)

$\Rightarrow U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow I(p) = \frac{1}{R + Lp} (U(p) - E(p))$

$E(p) = K_e \Omega_m(p)$

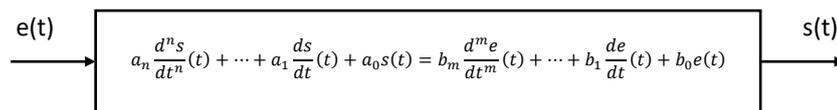
$C_m(p) = K_c I(p)$

$C_m(p) = J_{eq} p \Omega_m(p) + f_{eq} \Omega_m(p) \Rightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} C_m(p)$

Fonction de transfert

On suppose les conditions initiales nulles, sinon, il faut séparer la partie linéaire de la partie non linéaire.

Soit un SLCI dont le modèle de connaissance est donné sous forme d'une équation différentielle :



Systeme linéaire continu invariant (SLCI)

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle et **en considérant les conditions initiales nulles**, on a :

$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$

$\Rightarrow (a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E(p)$

$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$

(1) On l'appelle aussi « transmittance » du système.

On appelle **fonction de transfert**⁽¹⁾ la fraction $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ et donc $S(p) = H(p)E(p)$

La fonction de transfert d'un système est donc un **modèle** du système dans le domaine de Laplace :

La fonction de transfert est **indépendante** de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la variable symbolique p et des paramètres du modèle.

Forme canonique

Une fonction de transfert sous **forme canonique** est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + \dots p + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots p^{n-\alpha}}$$

K : **gain statique**⁽²⁾

α : **classe**⁽³⁾ ≥ 0

n : **ordre**⁽⁴⁾

(2) Le gain statique représente le rapport entre la sortie et l'entrée en régime permanent. C'est une constante

(3) La classe représente le nombre d'intégration.

(4) L'ordre de la fonction de transfert est l'ordre de l'équation différentielle.

(5) $1/x$ n'est pas un polynôme.

Méthode pour mettre une fonction de transfert sous forme canonique :

- 1) la fraction doit être un **quotient de polynômes**⁽⁵⁾ ;
- 2) on **factorise** par le **terme d'ordre le plus faible** du numérateur et du dénominateur.

Lorsque $\alpha = 1$ on dit que le modèle possède un intégrateur. Cela vient du fait que l'on peut écrire la fonction de transfert sous la forme $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p} \frac{A(p)}{B(p)}$, $\frac{1}{p}$ étant la transformée de Laplace d'une intégrale.

Exemple : Déterminer la forme canonique de $H(p) = \frac{\frac{2}{p} + 3 + 5p}{3p + 4p^2 + 7p^4}$

$$H(p) = \frac{\frac{2}{p} + 3 + 5p}{3p + 4p^2 + 7p^4} = \frac{2 + 3p + 5p^2}{3p^2 + 4p^3 + 7p^5} = \frac{2}{3p^2} \frac{1 + \frac{3}{2}p + \frac{5}{2}p^2}{1 + \frac{4}{3}p + \frac{7}{3}p^3}$$

gain statique : $K = \frac{2}{3}$ classe : $\alpha = 2$ ordre : $n = 5$

Exemple : A partir des 4 équations du MCC, déterminer $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ et mettre la fonction sous la forme canonique. Préciser le gain statique, la classe et l'ordre.
On prendra le couple résistant nul $C_{re}(t) = 0$.

$$I(p) = \frac{1}{R+Lp}(U(p) - E(p)) \qquad E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_c I(p) \qquad \Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} C_m(p)$$

$$\Rightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} K_c \frac{1}{R + Lp} (U(p) - K_e \Omega_m(p))$$

$$\Rightarrow (R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p)\Omega_m(p) = K_c U(p) - K_e K_c \Omega_m(p)$$

$$\Rightarrow ((R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p) + K_e K_c)\Omega_m(p) = K_c U(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{(R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p) + K_e K_c} = \frac{K_c}{\frac{LJ_{eq}}{K_e K_c} p^2 + \frac{Rf_{eq} + K_e K_c}{K_e K_c} p + 1}$$

gain statique : $K = \frac{K_c}{K_e K_c + Rf_{eq}}$ en (rad/s)/V classe : $\alpha = 0$ ordre : $n = 2$

2.2 Prévoir le comportement en stabilité

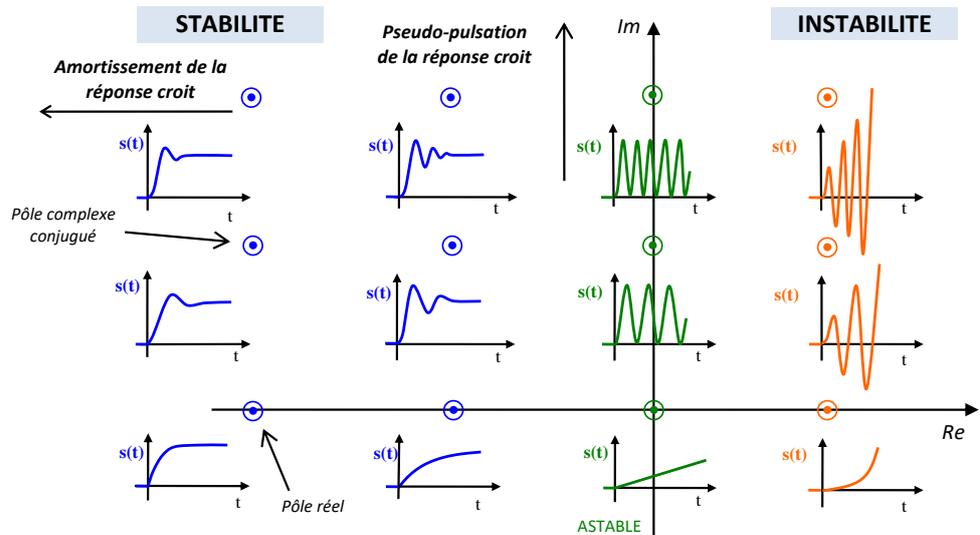
Cette performance doit être prédite en premier. Comme les autres performances, la stabilité est intrinsèque au modèle et est totalement indépendante du type d'entrée auquel il est soumis.

Condition de stabilité

On appelle **pôles**, les **racines du dénominateur** de la fonction de transfert.
On appelle **zéros**, les **racines du numérateur** de la fonction de transfert.

Exemple : un modèle peut donc posséder :
 – des pôles réels $p = a$;
 – des pôles complexes conjugués $p = a + j b$.

Pour mieux comprendre l'**influence des pôles** de la fonction de transfert d'un système, l'**allure de la réponse à une entrée en échelon** a été représentée selon la position de ces pôles **dans le plan complexe** :



Un système est donc **stable** au sens EBSB si les **pôles** de sa fonction de transfert sont à **partie réelle strictement négative**.

Les **pôles réels** ne génèrent pas d'oscillation alors que les **pôles complexes conjugués** font apparaître des oscillations. On appelle **pôle dominant** le pôle qui a une contribution significative par rapport aux autres sur la réponse.

2.3 Prévoir le comportement en rapidité

Le $t_{r5\%}$ d'un modèle du 1^{er} ou du 2^e ordre seront connus. Pour les modèles d'ordre supérieur, il sera nécessaire de les rapprocher vers ces modèles lorsque cela sera possible (réduction de pôles dominants). Dans le cas contraire, seule une étude numérique permettra de déterminer le $t_{r5\%}$.

2.4 Prévoir le comportement en précision

Détermination de l'erreur en régime permanent

(1) Contre-exemple :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{p^2 + \omega^2}$$

$$= 0$$

Ce qui n'est pas vrai.

(2) Attention, il s'agit de la limite supérieure 0^+ .

Pour une fonction $f(t)$ stable dont la limite existe⁽¹⁾, le **théorème de la valeur finale** permet de calculer sa valeur finale à partir de la transformée de Laplace :

$$f_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) \quad (2)$$

Le **théorème de la valeur initiale** permet de calculer sa valeur initiale à partir de la transformée de Laplace :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

Exemple : Déterminer la valeur finale de la réponse d'un système stable de classe 0 non perturbé soumis échelon d'amplitude E_0 .

Le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pH_{FTBF}(p)E(p) \\ = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{K_{FTBF} 1 + \dots + \dots p^m E_0}{p^0 1 + \dots + \dots p^n p} = K_{FTBF} E_0 \quad (1)$$

(1) On rappelle que

$$e(t) = E_0 u(t) \rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

Exemple : Déterminer l'erreur statique et l'erreur statique relative d'un système asservi stable de classe 0 non perturbé soumis à un échelon d'amplitude E_0 .

Le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$e_{r\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_r(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(E(p) - S(p)) \\ = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(E(p) - H_{FTBF}(p)E(p)) \\ = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(1 - H_{FTBF}(p))E(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \left(1 - \frac{K_{FTBF} 1 + \dots + \dots p^m}{p^0 1 + \dots + \dots p^n}\right) \frac{E_0}{p} \\ = (1 - K_{FTBF})E_0 \\ e_{r\infty\%} = \left| \frac{(1 - K_{FTBF})E_0}{E_0} \right| = |1 - K_{FTBF}|$$

Un système asservi stable de classe 0 soumis à un échelon est donc précis si

$$K_{FTBF} = 1$$

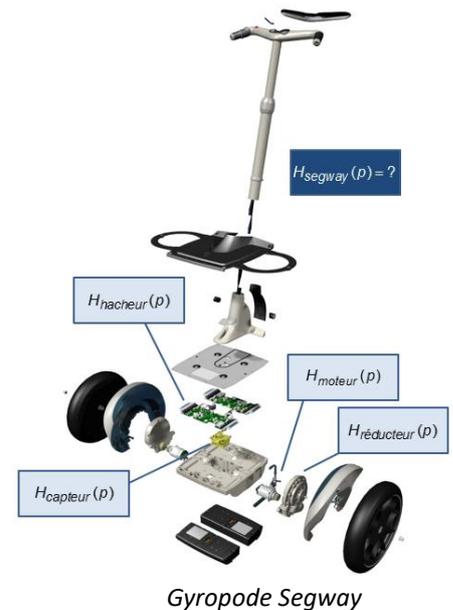
3 Schéma-bloc

Nous allons apprendre à déterminer la fonction de transfert globale d'un système, à partir du modèle de connaissance de chacun de ses constituants (préactionneur, actionneur, capteur...) et en tenant compte de la façon dont ces constituants sont organisés.

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes asservis qui, équipés de capteurs permettant en permanence le contrôle de la grandeur de sortie, sont capables de réagir de façon autonome à des perturbations extérieures.

Les **schémas blocs** servent à représenter graphiquement les équations et équations différentielles.

C'est aussi un outil de compréhension et de résolution efficace des phénomènes physique.



Gyropode Segway

3.1 Système asservi

Un système asservi correspond à un principe de conception.

Un **système asservi**⁽²⁾ est un système capable d'élaborer de manière autonome sa grandeur de **commande** à partir d'une valeur de **consigne** et d'une **mesure de la réponse** avec un **capteur**.

Une **grandeur de sortie** d'une activité d'un système **est asservie** si :

- il y a une **boucle de retour** avec un **capteur** ;
- un **correcteur** améliore les performances de stabilité, de rapidité et de précision.

Un système asservi est nécessairement bouclé, mais **la réciproque n'est pas vraie**.

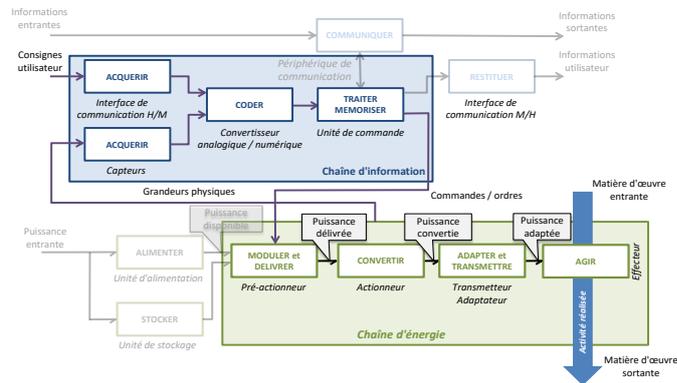
On parle de système **suiveur** ou de poursuite lorsque l'entrée varie.
On parle de système **régulé**⁽³⁾ lorsque l'entrée est constante.

(2) On parle alors d'un « système asservi » mais c'est un abus de langage, c'est la grandeur de sortie de l'activité étudiée, qui est asservie à la grandeur de consigne.

(3) Régulateur de vitesse, régulateur de chauffage...

3.2 Consigne et réponse

Dans la description par chaîne fonctionnelle, **les fonctions communiquer, restituer, alimenter et stocker de l'énergie n'interviennent pas directement sur les performances d'un système**. Le modèle d'un système asservi s'appuiera sur les éléments suivant :

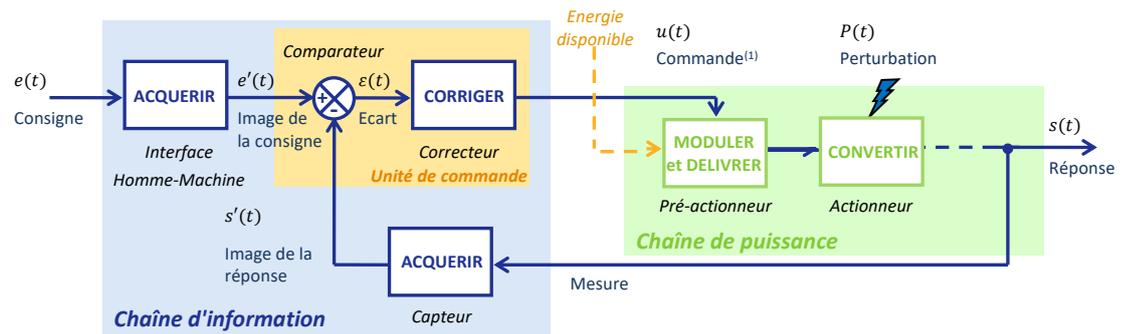


Dans cette représentation,

- la **grandeur d'entrée** est la **consigne** ;
- la **grandeur de sortie**, est la **réponse**. C'est une grandeur liée à la matière d'œuvre (effort, position, vitesse...).

3.3 Structure d'un système asservi

Le **schéma-bloc** est un diagramme **structurel** construit à partir de la **chaîne de puissance / chaîne d'information** en ne conservant que les constituants intervenant **directement dans l'asservissement**.



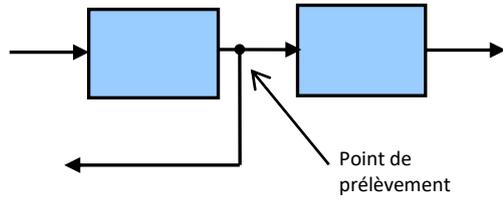
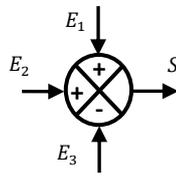
Les éléments suivants sont indispensables au bon fonctionnement d'un système asservi :

CONSTITUANT	FONCTION
Interface H/M ⁽²⁾	Traduire la consigne en un signal utilisable par l'unité de commande.
Capteur	Mesurer et traduire la réponse en un signal utilisable par l'unité de commande Il est dans la boucle de retour.
Comparateur	Comparer l'image de la réponse et l'image de la consigne. Il délivre un écart $\varepsilon(t)$ en général électrique, qui est une image de l'erreur $e_r(t)$. Avec : $\varepsilon(t) = e'(t) - s'(t)$ et $e_r(t) = e(t) - s(t)$
Correcteur	Corriger l'écart afin de générer un signal de commande pour améliorer les performances du système (stabilité – rapidité – précision) Il est après de soustracteur.

(1) Dans ce schéma-bloc, l'entrée du pré-actionneur correspond à la commande issue de l'unité de commande, en général une faible tension.
Ce n'est pas la haute puissance entrante que l'on retrouve dans le schéma des chaînes fonctionnelles.

(2) Parfois aussi appelé transducteur ou adaptateur. Un transducteur est un dispositif convertissant un signal physique en un autre.

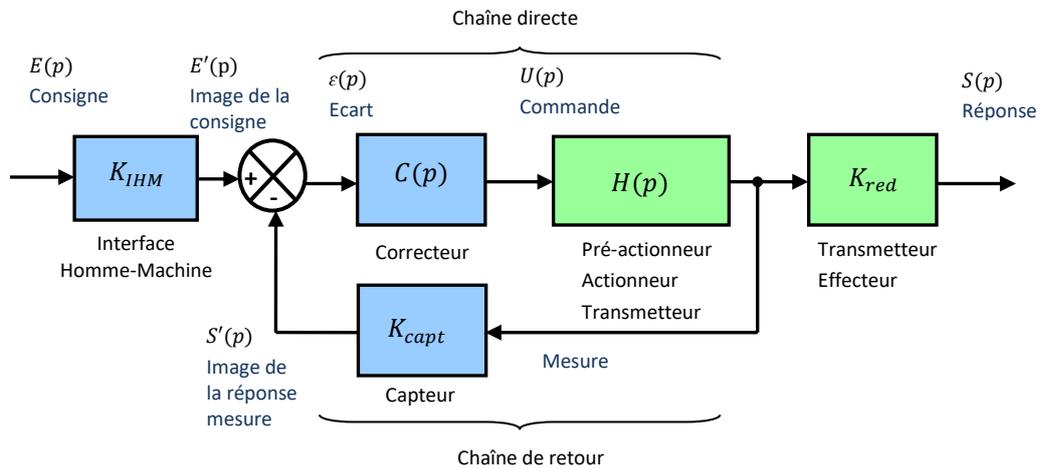
Les trois éléments de base du schéma-bloc sont :

<p>Le bloc qui représente un constituant du système asservi (interface H/M, capteur, actionneur, ...), une opération mathématique ou un changement d'unité. En générale, le bloc comporte un seul flux d'entrée et un seul flux de sortie.</p>	
<p>Le point de prélèvement qui prélève, sans le modifier, le signal en un point.</p>	
<p>Le comparateur (soustracteur ou sommateur) qui comporte plusieurs entrées mais une seule sortie. Ces entrées peuvent être additionnées ou soustraites.</p>	 <p style="text-align: right;">$S = E_1 + E_2 - E_3$</p>

3.4 Chaîne directe et chaîne de retour

Dans le but de pouvoir déterminer plus facilement la fonction de transfert d'une activité d'un système, la représentation schéma-bloc, en plus de s'appuyer sur la structure chaîne de puissance / chaîne d'information, met en évidence le modèle de chacun des constituants intervenant dans l'asservissement.

Pour un système non perturbé, la représentation d'un asservissement par schéma-bloc est la suivante :



Un système asservi est constitué de deux chaînes :

- la **chaîne directe**, entre le comparateur et le point de prélèvement du capteur, qui assure les fonctions de commande et de puissance ;
- la **chaîne de retour**, entre le point de prélèvement du capteur et le comparateur, qui assure la fonction de mesure de la réponse.

3.5 IHM

Selon le schéma-bloc général d'un système asservi :

$$\varepsilon(p) = E'(p) - S'(p) = K_{IHM} E(p) - \frac{K_{capt}}{K_{red}} S(p)$$

On veut que si $E(p) = S(p)$ alors $\varepsilon(p) = 0^{(1)}$

donc

$$K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}$$

On peut alors se ramener à un retour unitaire avec une transformation de schéma-bloc.

(1) En général il s'agit d'une tension (en V), parfois une intensité en ampère (A) ou des impulsions en point (pt).

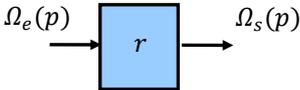
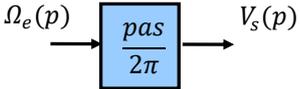
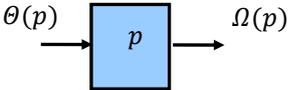
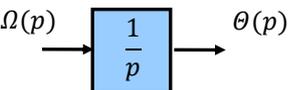
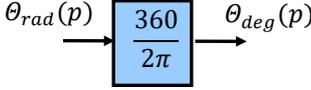
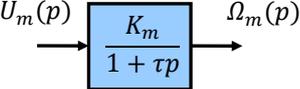
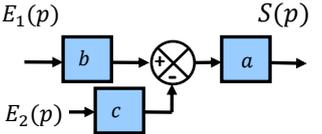
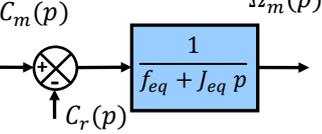
Par exemple si $K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}$, sur un écran

d'ordinateur on impose une consigne de +1m et un robot se déplace de +1m.

Si $K_{IHM} \neq \frac{K_{capt}}{K_{red}}$, sur un écran d'ordinateur on impose une consigne de +24V et un robot se déplace de +1m.

3.6 Modèle de connaissance

Chaque équation est représentée par un bloc qui contient sa fonction de transfert.

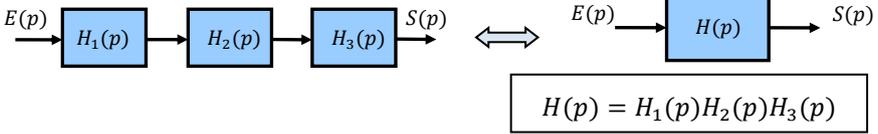
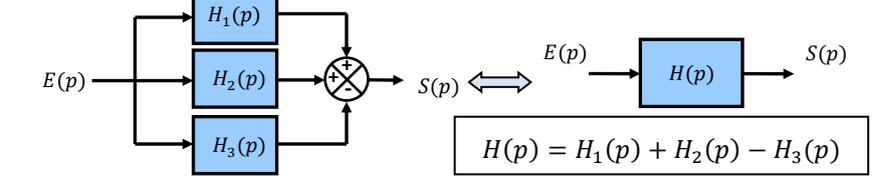
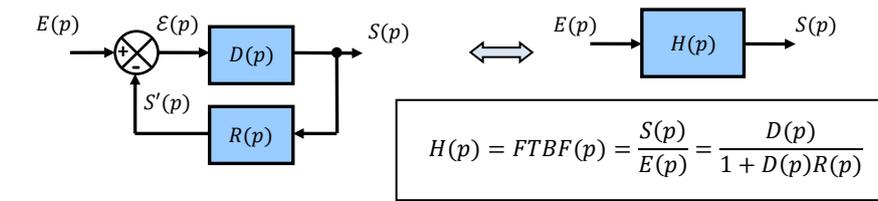
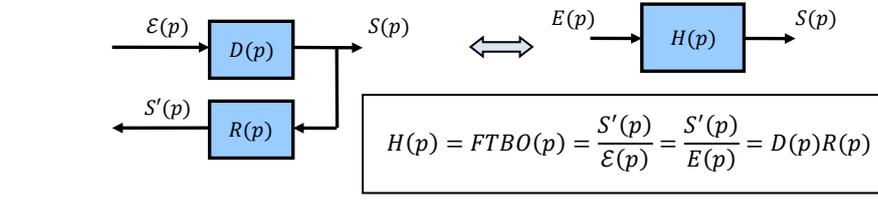
Exemple d'équation à modéliser	Équation temporelle	Transformée en Laplace	Schéma-bloc
Loi entrée-sortie cinématique d'un réducteur	$\omega_s(t) = r \omega_e(t)$	$\Omega_s(p) = r \Omega_e(p)$	
Loi entrée-sortie cinématique d'un transmetteur vis-écrou	$v_s(t) = \frac{pas}{2\pi} \omega_e(t)$	$V_s(p) = \frac{pas}{2\pi} \Omega_e(p)$	
Loi entre vitesse et position	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$\Omega(p) = p \theta(p)$	
	$\theta(t) = \int \omega(t) dt$	$\theta(p) = \frac{1}{p} \Omega(p)$	
Loi de changement d'unité	$\theta_{deg}(t) = \frac{360}{2\pi} \theta_{rad}(t)$	$\theta_{deg}(p) = \frac{360}{2\pi} \theta_{rad}(p)$	
Loi entrée sortie du premier ordre d'un moteur	$\tau \dot{\omega}_m(t) + \omega_m(t) = K u_m(t)$	$\Omega_m(p) = \frac{K_m}{1 + \tau p} U_m(p)$	
Cas général avec 3 grandeurs	$s(t) = a(b e_1(t) - c e_2(t))$	$S(p) = a(b E_1(p) - c E_2(p))$	
PFD appliqué sur l'arbre moteur	$C_m(t) - C_{re}(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_{eq} \omega_m(t)$	$\Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} (C_m(p) - C_{re}(p))$	

3.7 Simplifier un schéma-bloc

☞ La simplification éloigne le modèle, de la structure réelle du système.

Pour étudier ou prévoir le comportement d'un SLCI asservi, il est nécessaire de connaître sa fonction de transfert globale.

Celle-ci est obtenue à partir des différentes fonctions de transfert de chacun de ses constituants. Il est donc indispensable de connaître les règles d'association et de simplification des schémas-blocs.

<p>Blocs en série</p>	 $H(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)$ <p>La fonction de transfert équivalente de blocs en série est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des blocs.</p>
<p>Blocs en parallèle</p>	 $H(p) = H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)$ <p>La fonction de transfert équivalente de blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert de chacun des blocs.</p>
<p>Fonction de transfert en boucle fermée : FTBF</p>	 $H(p) = FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{D(p)}{1 + D(p)R(p)}$ <p>$D(p)$: FT de la chaîne directe $R(p)$: FT de la chaîne de retour</p> <p>Démonstration de la formule de Black :</p> $S = D\varepsilon = D(E - S') = D(E - RS)$ $\Rightarrow S + DR S = DE$ $\Rightarrow S(1 + DR) = DE$ $\Rightarrow S = \frac{D}{1 + DR} E$
<p>Fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO⁽¹⁾</p>	 $H(p) = FTBO(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{S'(p)}{E(p)} = D(p)R(p)$

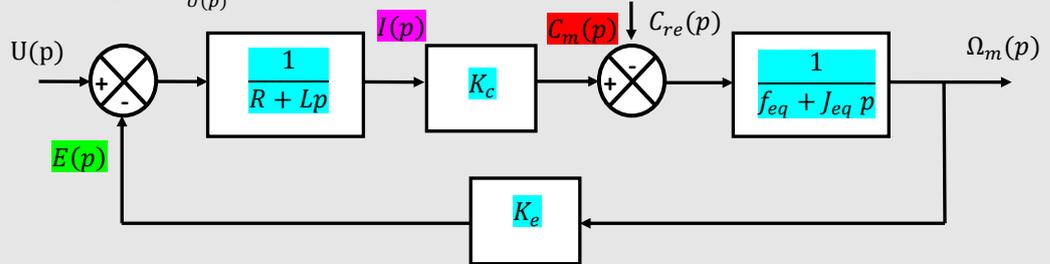
(1) On note parfois $F(p)$ pour la FTBO et $H(p)$ pour la FTBF.

Un système asservi en FTBF corrige sa grandeur de réponse.
 Un système en FTBO ne corrige plus sa grandeur de réponse.

Méthodologie pour compléter un schéma bloc :

- On détermine certains flux avec l'homogénéité des **comparateurs** et des équations.
- On détermine quelle équation correspond à quel bloc à l'aide des **couleurs** sur les flux.
- On écrit la **sortie** en fonction de(s) l'entrée(s) pour trouver la fonction de transfert : 2 flux se modélisent par un bloc, 3 flux par un bloc et un comparateur.

Exemple : A partir des 4 équations du MCC, compléter le schéma bloc. En prenant $C_{re}(p) = 0$ déterminer $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ et mettre la fonction sous la forme canonique.

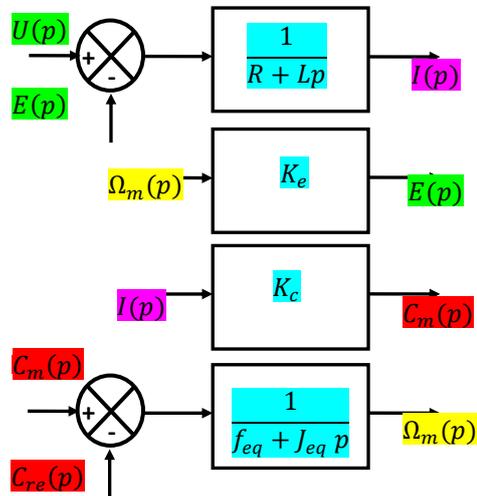


$$(R + Lp)I(p) = U(p) - E(p)$$

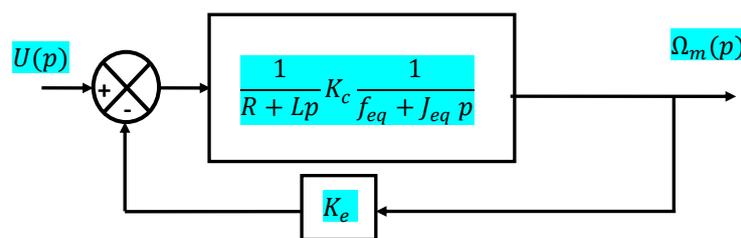
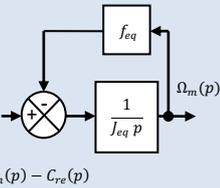
$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_c I(p)$$

$$(f_{eq} + J_{eq} p) \Omega_m(p) = C_m(p) - C_{re}(p)$$



On aurait aussi pu noter :



Attention $\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{a}{c+b}$

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{(R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p) \left(1 + \frac{K_e K_c}{(R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p)} \right)} = \frac{K_c}{(R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p) + K_e K_c}$$

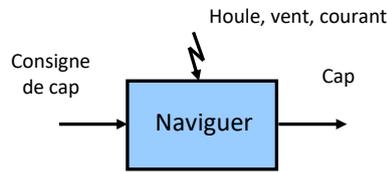
$$= \frac{K_c}{R f_{eq} + (R J_{eq} + L f_{eq}) p + L J_{eq} p^2 + K_e K_c} = \frac{K_c}{1 + \frac{R J_{eq} + L f_{eq}}{K_e K_c + R f_{eq}} p + \frac{L J_{eq}}{K_e K_c + R f_{eq}} p^2}$$

4 SLCI asservi perturbé

4.1 Perturbation

Pour qu'un système réponde correctement aux besoins de l'utilisateur, il est important que les performances (stabilité, rapidité et précision) ne varient pas quels que soient les phénomènes extérieurs dit « **perturbations** » qui pourraient les perturber.

Exemples : Un bateau suivant un cap



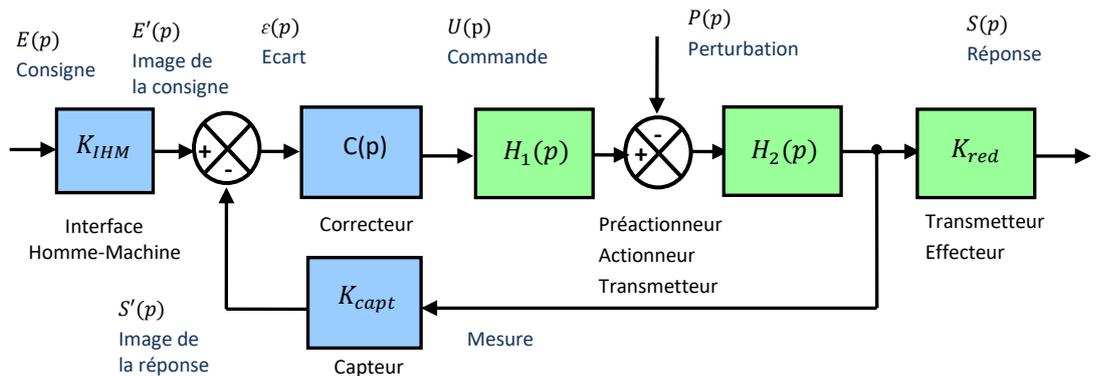
Pilote automatique de bateau

4.2 Schéma-bloc d'un système perturbé

On appelle **perturbation**, toute cause susceptible de modifier la sortie **indépendamment du signal de commande**.

Dans le modèle d'un système asservi, la **perturbation** est généralement une **entrée** qui vient modifier la chaîne directe au travers d'un **soustracteur**.

Une perturbation est une entrée non fournie par l'utilisateur.



Ce système possède 2 entrées et 1 sortie.

4.3 Théorème de superposition

Lorsqu'il y a plusieurs entrées, on pose :

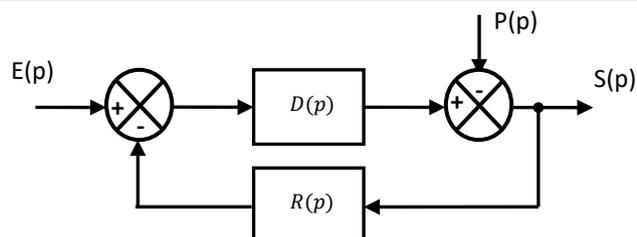
$$H_1(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P(p)=0} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \left. \frac{S(p)}{P(p)} \right|_{E(p)=0}$$

Théorème de superposition :

La sortie totale du système est la somme des sorties qui correspondent à chacune des entrées prises isolément.

$$S(p) = H_1(p)E(p) + H_2(p)P(p)$$

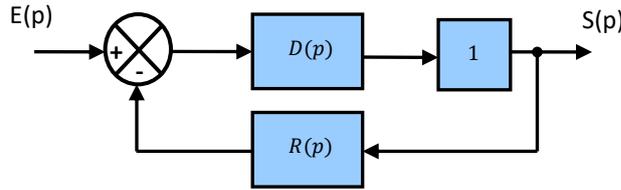
Exemple : on cherche à déterminer la sortie du système perturbé suivant :



Méthode 1 : théorème de superposition

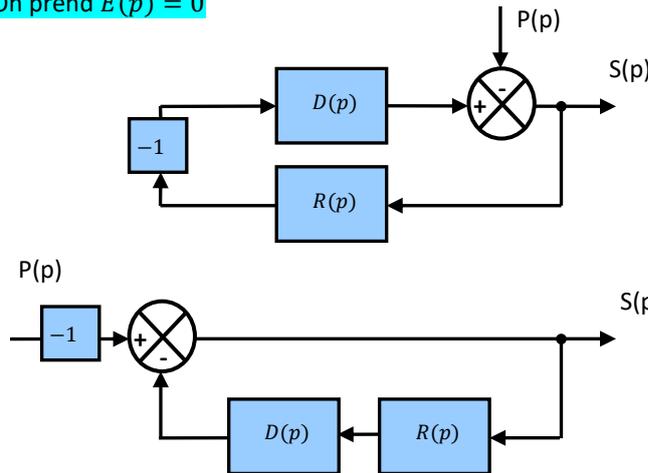
On a 2 entrées.

On prend $P(p) = 0$:



$$H_1(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P(p)=0} = \frac{D(p)}{1 + D(p)R(p)}$$

On prend $E(p) = 0$

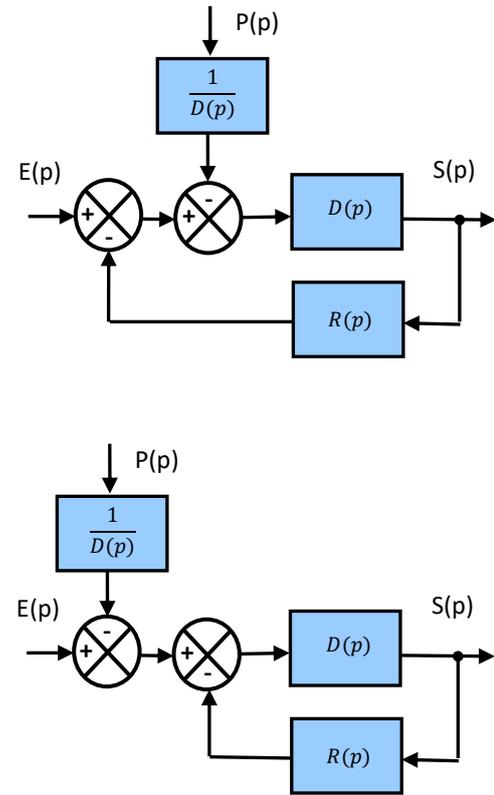


$$H_2(p) = \left. \frac{S(p)}{P(p)} \right|_{E(p)=0} = \frac{-1}{1 + D(p)R(p)}$$

On applique le théorème de superposition :
 $S(p) = H_1(p)E(p) + H_2(p)P(p)$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p)R(p)} E(p) - \frac{1}{1 + D(p)R(p)} P(p)$$

Méthode 2 : schéma-bloc équivalent



$$S(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p)R(p)} \left(E(p) - \frac{1}{D(p)} P(p) \right)$$

Remarque : Les dénominateurs sont identiques et ce sera presque toujours le cas.

Remarque : H_1 s'appelle la fonction de transfert en poursuite et H_2 la fonction de transfert en régulation.

4.4 Stabilité d'un modèle perturbé

Pour prévoir la stabilité d'un modèle perturbé, il suffit d'étudier la stabilité de chaque fonction de transfert associée à chaque entrée.

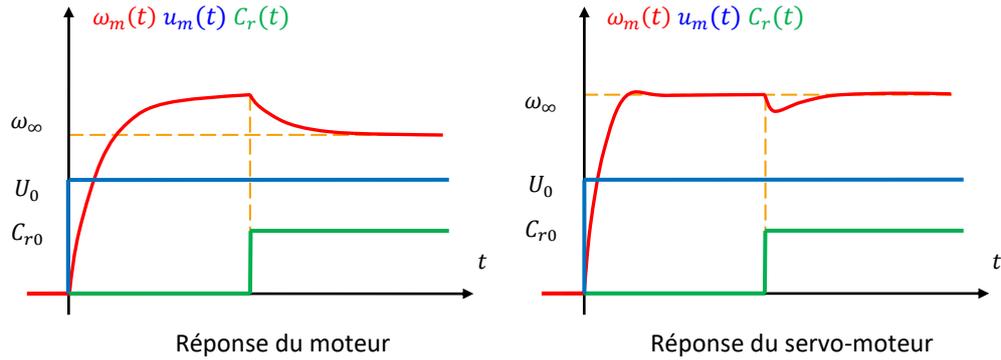
4.5 Précision d'un modèle perturbé

La valeur finale de la réponse d'un **modèle stable** soumis à **plusieurs entrées en échelon** est égale à $s_{\infty} = \sum s_i = \sum K_i E_{i\infty}$

Cette valeur permettra de déterminer l'erreur en régime permanent, et de prévoir la précision d'un modèle perturbé soumis à des entrées en échelon.

Exemple : réponse d'un MCC perturbé à un échelon de tension

Prenons deux entrées positives.



- La perturbation modifie la vitesse de rotation du moteur.
- La correction réduit l'influence de la perturbation.

Pour des entrées en rampe, il faut utiliser le théorème de la valeur finale.

4.6 Schéma-bloc équivalent

L'objectif est d'isoler les boucles en déplaçant des blocs, et en **faisant en sorte que 2 comparateurs soient côte à côte afin de les permuter**.

Les manipulations suivantes ne sont à effectuer que si la présence de boucles dépendantes est constatée.

⚠ Attention, ces simplifications éloignent encore plus le modèle, de la réalité physique du système...

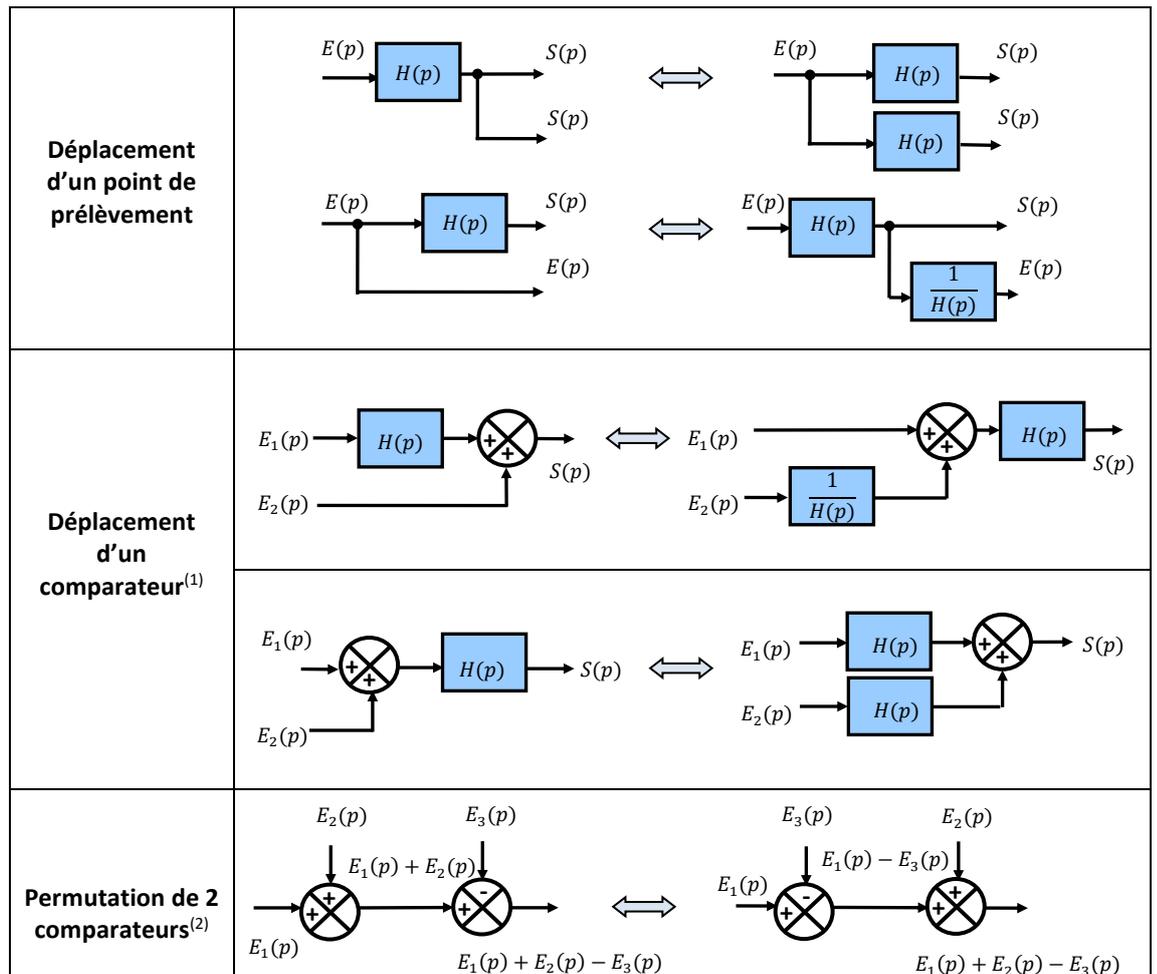
⚠ On utilisera ces règles pour désimbriquer des boucles dans un schéma-bloc.

(1) C'est une factorisation et un développement graphique.

$$z = ax + ay$$

$$\Leftrightarrow z = a(x + y)$$

(2) Attention cette règle ne marche plus avec un signe - sur le flux principale.



Attention : On ne peut pas permuter un point de prélèvement et un comparateur !

5 Performances d'un système et performances d'un système asservi

Un système est asservi pour que son fonctionnement soit conforme à des attentes définies dans un cahier des charges. Ces attentes sont déclinées en termes de **performances**.

Les performances sont des caractéristiques propres à un système ou liées à son comportement lorsqu'il est sollicité de façon particulière. Nous allons voir les performances :

- de **stabilité**, propriété de convergence temporelle vers un état d'équilibre ;
- de **rapidité**, caractérisant le dynamisme des systèmes stables ;
- de **précision**, aptitude des systèmes asservis stables à atteindre la valeur attendue.

L'objectif est d'obtenir, à l'aide de réglages du correcteur, le **meilleur compromis** entre les différents critères de performances globales du système et de valider les critères du CdCF.

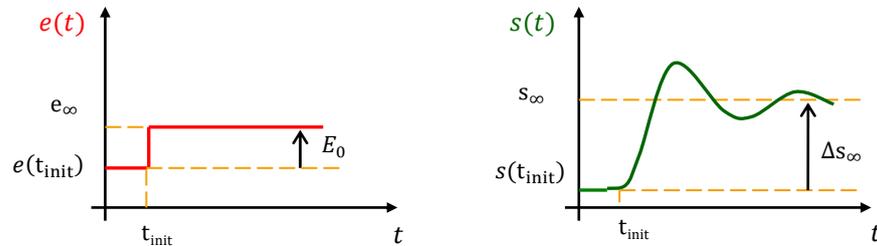
5.1 Notations

Les valeurs finales des grandeurs d'entrée (consigne) et de sortie (réponse), correspondent aux valeurs de l'entrée et de la sortie du système en régime permanent, soit pour un temps suffisamment grand. Elles sont notées e_∞ et s_∞ avec :

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \text{ et } s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

La variation totale de la grandeur d'entrée est $\Delta e_\infty = e_\infty - e(t_{init}) = E_0$

La variation totale de la grandeur de sortie est $\Delta s_\infty = s_\infty - s(t_{init})$



5.2 Stabilité des systèmes

Pour certains systèmes, il est impératif qu'il n'y ait aucun dépassement.

(1) La stabilité est la performance qu'il faut évaluer en premier car un système instable est inutilisable.

Un système est **stable**⁽¹⁾ si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie **converge** vers une **valeur finale constante**.
(entrée bornée – sortie bornée EB-SB).

Une réponse présente un **dépassement** si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie dépasse sa **valeur finale**. La courbe de sortie présente alors un extrémum.

La stabilité est alors caractérisée par l'**amplitude du premier dépassement**, noté D_1 , par rapport à la valeur finale⁽²⁾ :

– le **dépassement absolu** d'ordre k vaut $D_k = |\Delta s(t_k) - \Delta s_\infty|$ ⁽³⁾ donc :

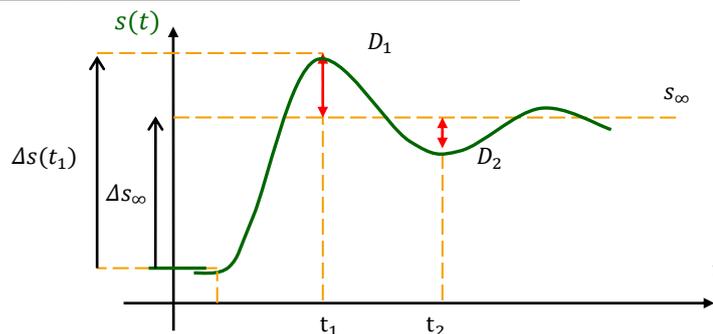
$$D_1 = |\Delta s(t_1) - \Delta s_\infty| \text{ avec } t_1 \text{ l'instant du premier dépassement ;}$$

– le **dépassement relatif** d'ordre k vaut $D_{k\%} = \left| \frac{D_k}{\Delta s_\infty} \right|$ donc $D_{1\%} = \left| \frac{D_1}{\Delta s_\infty} \right|$.

(2) Attention : Ce ne sont pas les dépassements par rapport à la valeur en entrée mais bien par rapport à la valeur finale de la sortie.

(3) Les dépassements sont donc tous positifs, même D_2 .

Réponse d'un système pour une entrée test en échelon :



👁 Première opération avec le nouveau robot chirurgical Da Vinci

<https://www.dailymotion.com/video/k6MMnf0KGm890zBnXJM>



(1) Qui permet de toucher physiquement avec des objets virtuels, c'est un asservissement de force.

haptikós, capable de toucher

Contexte : Robot chirurgical Da Vinci

Le robot Da Vinci est un robot médical dirigé par un chirurgien pour réaliser des opérations, principalement au niveau de l'abdomen. L'opération se déroule à distance à l'aide d'un écran et de dispositifs haptiques⁽¹⁾. Les mouvements sont tous asservis et requièrent un réglage fin.



Exemple : Le graphique ci-contre représente la réponse du robot chirurgical Da Vinci à une entrée en échelon. Le système est-il stable ? donner la valeur des 2 premiers dépassements et les dépassements relatifs.

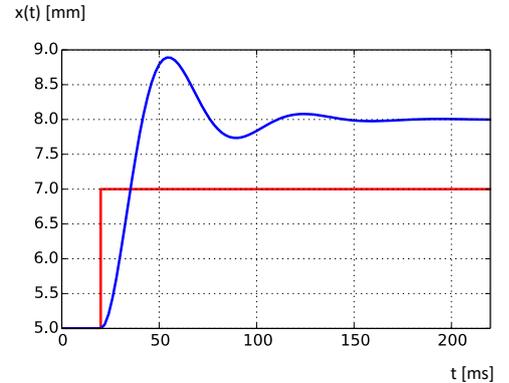
Le système est stable car pour une entrée en échelon, la sortie converge vers une valeur constante (EBSB).

$$D_1 = |\Delta x(t_1) - \Delta x_\infty| = |3,9 - 3| = 0,9 \text{ mm}$$

$$D_{1\%} = \left| \frac{D_1}{\Delta x_\infty} \right| = \left| \frac{0,9}{3} \right| = 0,3 = 30\%$$

$$D_2 = |\Delta x(t_2) - \Delta x_\infty| = |2,7 - 3| = 0,3 \text{ mm}$$

$$D_{2\%} = \left| \frac{D_2}{\Delta x_\infty} \right| = \left| \frac{0,3}{3} \right| = 0,1 = 10\%$$



Attention à certains systèmes réels :

Un système réel instable oscille jusqu'à sa destruction. Ces oscillations sont dans le cas général **limitées par les différentes saturations** (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques...).

Ces limitations physiques peuvent laisser croire que le système est stable.

5.3 Rapidité des systèmes

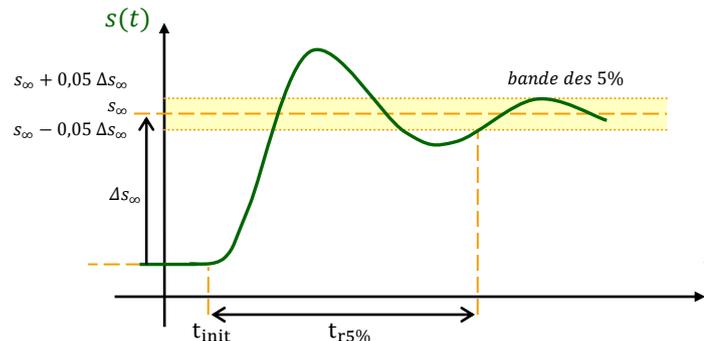
Pour certains systèmes, il est impératif que le temps de réponse du système soit faible.

À condition que le **système soit stable**, la **rapidité** est caractérisée, pour une **entrée en échelon**, par la durée que met le système pour que la sortie soit suffisamment proche de sa valeur finale et ne plus s'en éloigner.

Par convention, le critère caractérisant la **rapidité** d'un système stable est le **temps de réponse à 5%** noté $t_{r5\%}$.
On définit la **bande des 5%** par l'intervalle :
$$\text{bande des 5\%} = [s_\infty - 0,05 \Delta s_\infty, s_\infty + 0,05 \Delta s_\infty]$$

Le **temps de réponse à 5%**⁽²⁾⁽³⁾ est la **durée** mise par la grandeur de **sortie** pour rentrer dans la bande des 5% et ne plus en sortir.

Réponse d'un système pour une entrée test en échelon⁽⁴⁾ :



(2) On pourrait utiliser d'autres critères, comme le temps de montée. Défini comme le premier instant auquel la réponse atteint la valeur finale.

(3) La valeur de 5% est arbitraire.

(4) Attention : il faut construire la bande des 5% autour de la valeur finale de la sortie et non pas autour de la valeur de la grandeur d'entrée !

👉 On ne dira jamais que le système est rapide... mais on peut comparer 2 systèmes entre eux.

Exemple : Déterminer le temps de réponse à 5%.

On lit graphiquement

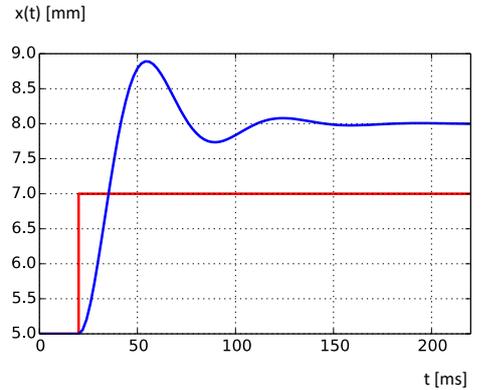
$$x_{\infty} = 8 \text{ mm}$$

$$\Delta x_{\infty} = 8 - 5 = 3 \text{ mm}$$

$$\text{bande des 5\%} = [8 - 0,05 \times 3 ; 8 + 0,05 \times 3] = [7,85 ; 8,15]$$

On lit graphiquement :

$$t_{r5\%} = 100 - 20 = 80 \text{ ms}$$



5.4 Précision des systèmes asservis

Pour certains systèmes, il est impératif que la précision du système soit excellente.

À condition que le système asservi soit **stable**, la **précision** n'est définie que pour un système ayant des **grandeurs d'entrée et de sortie de même nature**.

L'erreur : $e_r(t) = e(t) - s(t)$

L'erreur statique : $e_{r\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$

Si le système est stable et que l'entrée et la sortie sont de même nature, la **précision** est caractérisée par :

– l'erreur statique : $e_{r\infty} = E_0 - \Delta s_{\infty}$

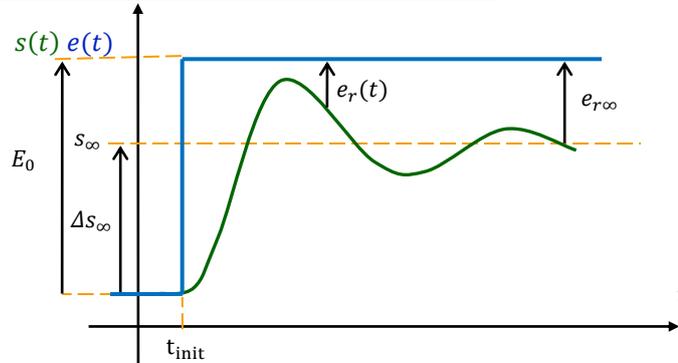
– ou par l'erreur statique relative :

$$e_{r\% \infty} = \left| \frac{e_{r\infty}}{E_0} \right| \text{ pour une consigne en échelon.}$$

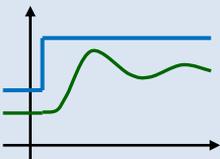
Si l'erreur statique est **nulle**, on dira que le système est **précis**⁽¹⁾.

(1) Dire que le système est très précis ne veut rien dire.

Réponse d'un système pour une consigne test en échelon



✎ Pour $e(t_{init}) \neq s(t_{init})$ l'erreur ne peut pas être tracée :

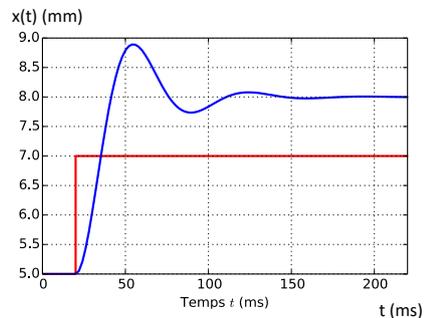


Exemple : Déterminer l'erreur statique et l'erreur statique relative de la réponse à l'échelon d'amplitude X_0 .

Les grandeurs d'entrée et de sortie sont de même nature.

$$e_{r\infty} = X_0 - \Delta x_{\infty} = 2 - 3 = -1 \text{ mm}$$

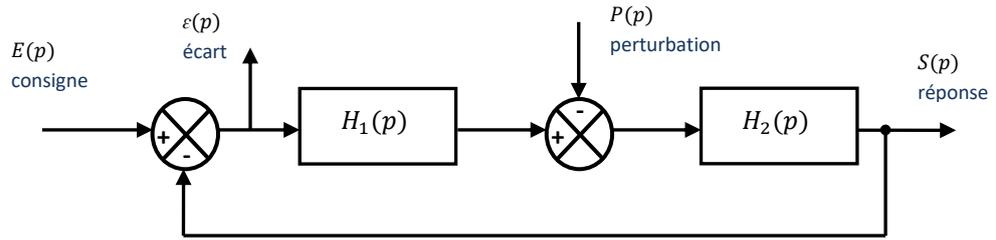
$$e_{r\% \infty} = \left| \frac{e_{r\infty}}{X_0} \right| = \left| \frac{-1}{2} \right| = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$$



5.5 Cas général écart statique d'un système non perturbé

(1) Si le système ne peut pas se mettre sous forme d'un schéma à retour unitaire, se demander quelle est l'erreur statique entre des grandeurs dont les échelles ne sont pas du même ordre de grandeur n'a aucun intérêt !

On considère un **système asservi perturbé**. En choisissant bien K_{IHM} et en faisant une transformation de schéma bloc, il peut se mettre sous la forme d'un **retour unitaire**⁽¹⁾.



En utilisant le théorème de superposition, on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)H_2(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} P(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p)$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l'erreur statique d'un système non perturbé

$$e_{r\infty} = \varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha} (1 + a_1 p + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha})} E(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha}} E(p)$$

(2) Pour une entrée en échelon, on parle parfois d'erreur de position ou d'erreur indicielle pour une entrée unitaire.

Pour une entrée en rampe, on parle parfois d'erreur de traînage, d'erreur de poursuite ou d'erreur en vitesse.

Le tableau de l'écart statique relatif est plus élégant car il a sur sa diagonale $\frac{1}{1 + K_{FTBO}}$ puis uniquement $\frac{1}{K_{FTBO}}$.

Attention, ne pas confondre K_{FTBO} et K_{FTBF} .

Erreur statique $e_{r\infty}$ ⁽²⁾		$\alpha_{FTBO} = 0$	$\alpha_{FTBO} = 1$	$\alpha_{FTBO} = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1 + K_{FTBO}}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K_{FTBO}}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K_{FTBO}}$
Pour un système de FTBO de classe α_{FTBO} et de gain statique K_{FTBO}				

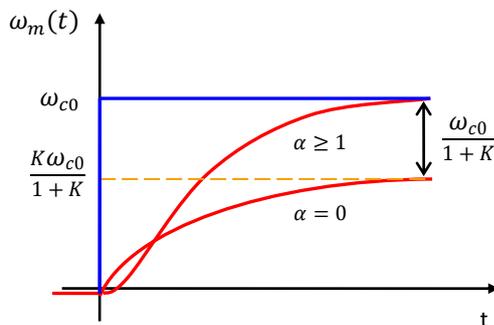
L'erreur statique pour une entrée en échelon est nulle lorsque la FTBO est de classe $\alpha \geq 1$.

L'erreur statique pour une entrée en rampe est nulle lorsque la FTBO est de classe $\alpha \geq 2$.

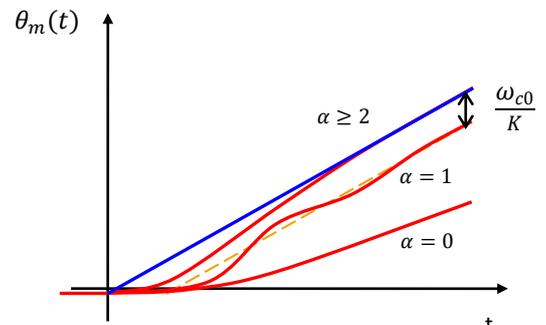
Pour un système de classe 0 soumis à un échelon :

- Le **correcteur proportionnel** améliore la **précision** du système, car augmente K_{FTBO} .
- Le **correcteur intégral** rend le système précis, car il augmente la classe α_{FTBO} .

Exemple : MCC asservi



Réponse à un échelon



Réponse à une rampe

6 Prévoir la réponse à un échelon

6.1 Modèle proportionnel

(1) Appelé aussi modèle à gain pur.

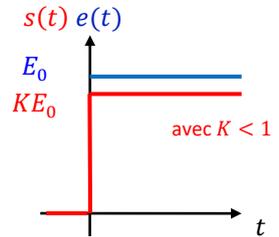
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle à **action proportionnelle**⁽¹⁾ sont :

$$s(t) = Ke(t) \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

K : gain statique (*unité* = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$)

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle à **action proportionnelle** est un **échelon d'amplitude KE_0** .

$$s(t) = KE_0 \text{ pour } t \geq 0$$



6.2 Modèle intégrateur

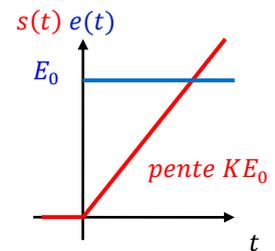
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle **intégrateur** sont :

$$s(t) = K \int_0^t e(t') dt' \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

K : gain statique (*unité* = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} \cdot s^{-1}$) car l'unité de p est s^{-1}

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle **intégrateur** est une **rampe de pente KE_0** .

$$s(t) = KE_0 t \text{ pour } t \geq 0$$



6.3 Modèle dérivateur

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle **dérivateur** sont :

$$s(t) = K \frac{de}{dt}(t) \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = Kp$$

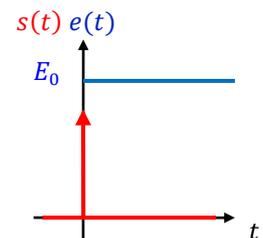
K : gain statique (*unité* = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} \cdot s$) car l'unité de p est s^{-1}

Rappel : la variable symbolique p est homogène à $[T^{-1}]$, soit des s^{-1} .

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle **dérivateur** est **l'impulsion de Dirac $\delta(t)$** :

$$s(t) = \delta(t)$$

On retiendra : $s(t)=0$ pour $t > 0$



6.4 Réponse indicielle du 1^{er} ordre

L'équation temporelle (équation différentielle du 1^{er} degré) et la fonction de transfert d'un modèle du premier ordre sont :

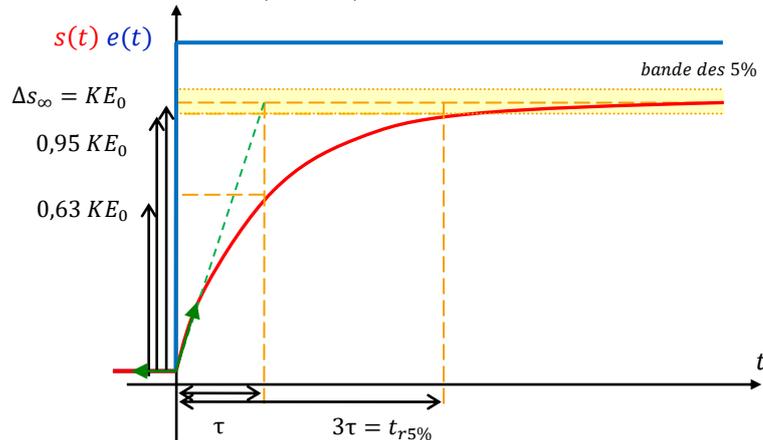
$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = Ke(t) \text{ pour } t \geq 0 \xrightarrow{L} \quad H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

paramètres caractéristiques :

K : gain statique (unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$)

τ : constante de temps (>0, en secondes)

La solution de l'équation différentielle pour des conditions initiales nulles et une entrée en échelon d'amplitude E_0 est : $s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ pour $t \geq 0$.



Si la courbe commence à 0 en 0 :

- on utilise s_∞

- $s(\tau) = 0,63KE_0$

Le **gain statique K** caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** : $s_\infty = KE_0$.

La **constante de temps τ** caractérise le comportement du modèle en **régime transitoire** :

- $\Delta s(\tau) = 0,63KE_0$;

- $\Delta s(3\tau) = 0,95KE_0$;

La **tangente à l'origine** coupe la **valeur finale de la sortie** en $t = \tau$

Déterminer :

- $s(0) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = 0$

ou $s(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{K E_0}{1+\tau p} = 0$

- $s_\infty = KE_0$

ou

$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{K E_0}{1+\tau p} = KE_0$

- $s(\tau) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = 0,63KE_0$

- $s(3\tau) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}}\right) = 0,95KE_0$

- $\dot{s}(t) = \frac{KE_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

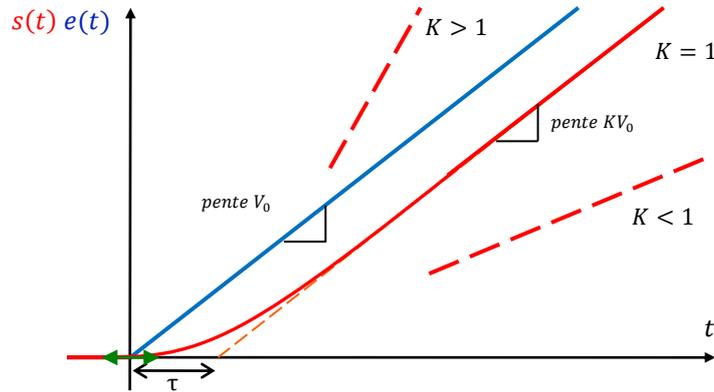
- $\dot{s}(0) = \frac{KE_0}{\tau} e^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{KE_0}{\tau}$

ou

$\dot{s}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{s}(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 \frac{K E_0}{1+\tau p} = \frac{KE_0}{\tau}$

6.5 Réponse à une rampe du 1^{er} ordre

La solution de l'équation différentielle pour des conditions initiales nulles et une entrée en rampe de pente V_0 est : $s(t) = KV_0 \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ pour $t \geq 0$.



Le **gain statique K** caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** :
 La pente en régime permanent est KV_0 .
L'asymptote en régime permanent coupe l'axe des abscisses en τ .
 La **tangente à l'instant initial** est nulle

Déterminer :

- $s(0) = KV_0 \left(0 - \tau + \tau e^{-\frac{0}{\tau}} \right) = 0$
- $s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} KV_0(t - \tau)$ on a donc une asymptote de pente KV_0 retardée de τ

6.6 Modèle du 2^e ordre

L'équation temporelle (équation différentielle du 2^e degré) et la fonction de transfert d'un modèle du deuxième ordre sont :

$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2}(t) + \frac{2z}{\omega_0} \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = Ke(t)$ pour $t \geq 0 \xrightarrow{L} H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

paramètres caractéristiques :

- K** : gain statique (unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$)
- z** : facteur d'amortissement (noté parfois m ou ξ , > 0 , sans unité)
- ω_0** : pulsation propre non amortie (> 0 , en rad/s)

La réponse dépend des pôles de la fonction de transfert, c'est-à-dire des racines du dénominateur.

On a $\Delta = \left(\frac{2z}{\omega_0}\right)^2 - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}(z^2 - 1)$.

Ainsi, la réponse est différente suivant la valeur du facteur d'amortissement z (si $z > 1$ ou $z < 1$). Les équations temporelles (résultat classique qui sera démontré en physique et mathématiques) sont données ci-dessous juste pour information.

z > 1 Régime apériodique (non oscillatoire amorti)

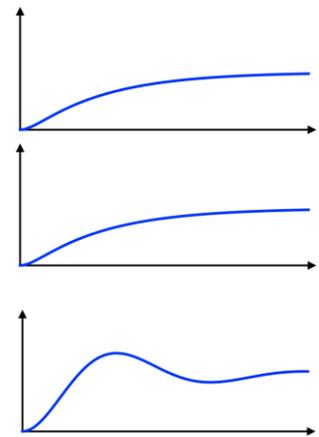
$s(t) = KE_0 \left(1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$ pour $t \geq 0$
 avec $\tau_1 = \frac{1}{\omega_0}(z - \sqrt{z^2 - 1})$ et $\tau_2 = \frac{1}{\omega_0}(z + \sqrt{z^2 - 1})$

z = 1 Régime apériodique critique

$s(t) = KE_0 \left(1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ pour $t \geq 0$
 avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

0 < z < 1 Régime pseudo-périodique (oscillatoire amorti)

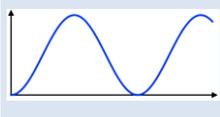
$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \varphi) \right)$ pour $t \geq 0$
 Avec $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$



Si $z = 0$

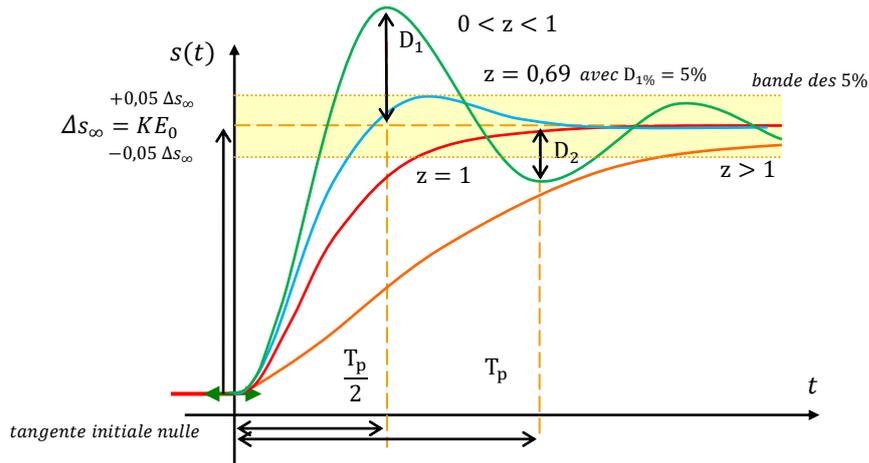
$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

régime oscillatoire non amorti, correspond aux systèmes harmoniques. La valeur finale n'existe pas, le temps de réponse à 5% et le nombre de dépassements ne sont pas définis. Il ne sera pas étudié ici.



$s(t) = KE_0(1 - \cos(\omega_0 t))$

Caractéristiques de la réponse à un échelon



Attention, si la courbe commence à 0 en 0, on utilise s_{∞} .

Un 1^{er} ordre introduit la notion de « temps » ; on va aller d'une valeur à une autre sur une durée.

Un 2^e ordre introduit en plus la notion de « chemin » ; on va aller d'une valeur à une autre d'une manière différente.

La variation totale de la sortie en régime permanent est $\Delta s_{\infty} = KE_0$.
La tangente à l'instant initial est nulle.

Dépassements

Le nombre et les valeurs des dépassements $D_{k\%}$ dépendent que de z :

- lorsque $z \geq 1$, la courbe non oscillatoire amortie. Il n'y pas de dépassement ;
- lorsque $0 < z < 1$, la valeur du dépassement relatif d'ordre k est donnée par l'abaque ci-dessous ou par la relation :

$$D_{k\%} = \left| \frac{\Delta s(t_k) - \Delta s_{\infty}}{\Delta s_{\infty}} \right| = e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \quad z = \frac{\sqrt{\ln^2 D_{k\%}}}{k^2 \pi^2 + \ln^2 D_{k\%}}$$

- lorsque $z = 0,69$, il existe un seul dépassement⁽¹⁾ > 1% qui vaut $D_{1\%} = 5\%$;

(1) Théoriquement, il y a toujours une infinité de dépassements.

Expérimentalement, ils sont atténués par le frottement jusqu'à l'équilibre.

Démonstration des valeurs des dépassements

En regardant la partie 6.6 pour $0 < z < 1$, le $k^{\text{ième}}$ dépassement en $k \frac{T_p}{2}$ vaut :

$$D_{k\%} = e^{-z\omega_0 \frac{kT_p}{2}} = e^{-z\omega_0 \frac{k2\pi}{2\omega_0\sqrt{1-z^2}}} = e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Lien entre z et $D_{k\%}$:

$$\sqrt{1-z^2} \ln D_{k\%} = -zk\pi \Rightarrow (1-z^2)\ln^2 D_{k\%} = \pi^2 k^2 z^2 \Rightarrow \ln^2 D_{k\%} = \pi^2 k^2 z^2 + z^2 \ln^2 D_{k\%}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{\ln^2 D_{k\%}}}{k^2 \pi^2 + \ln^2 D_{k\%}} \quad \text{Pour } k = 1, \text{ la courbe la plus rapide est pour : } \frac{\sqrt{\ln^2 0,05}}{\pi^2 + \ln^2 0,05} \approx 0.6901$$

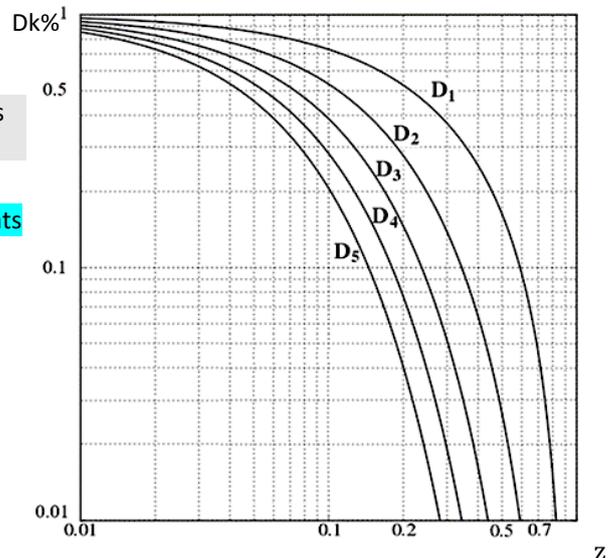
Abaque des dépassements relatifs

Exemple : Donner les dépassements relatifs supérieurs à 1% pour $z=0,3$

Pour $z = 0,3$ il y a 4 dépassements supérieurs à 1%.

On lit graphiquement avec l'abaque :

- $D_1\% = 35\%$
- $D_2\% = 13\%$
- $D_3\% = 5\%$
- $D_4\% = 2\%$



✋ Pour les échelles log, on retiendra :

$\log(2) = 0,301 \approx 0,3$

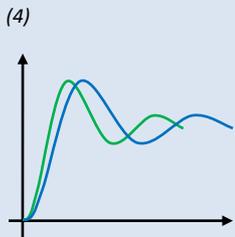
$\log(3) = 0,47 \approx 0,5$

$\log(5) = 0,699 \approx 0,7$

(1) C'est l'intervalle de temps correspondant au motif des oscillations amorties de la réponse, voir 5.6.

(2) Parfois appelé pulsation amortie ω_a . C'est la pulsation des oscillations amorties de la réponse.

(3) Le temps de réponse réduit n'est pas un temps ! Tout comme $D_{1\%}$, n'est pas une distance.



Pseudo-période

Lorsqu'il y a dépassement $0 < z < 1$, ces derniers ont lieu **toutes les demi-périodes**, avec :

- la **pseudo-période**⁽¹⁾ vaut $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_p}$;
- la pseudo-pulsation⁽²⁾ vaut $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ en rad/s.

Contrairement au dépassement, la **valeur de la pseudo-période T_p dépend de z et ω_0**

La relation entre fréquence et période est donnée par $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Temps de réponse et temps de réponse réduit

Contrairement au dépassement, la **valeur temps de réponse à 5% dépend de z et ω_0**

- lorsque $0 < z < 1$, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est peu amorti ;
- lorsque $z = 0,69$, $t_{r5\%}$ est minimal et $D_{1\%} = 5\%$;
- lorsque $z = 1$, il s'agit du modèle **sans dépassement le plus rapide**.
- lorsque $z > 1$, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est très amorti ;

Le temps de réponse réduit⁽³⁾ ne dépend que du coefficient d'amortissement z du système étudié. **Il est sans unité.**

Il n'existe pas d'expression simple qui permet de calculer $t_{r5\%}$. On utilise l'abaque ci-dessous qui nous donne la valeur du **temps de réponse réduit**, défini par $t_{r5\%}\omega_0$ (sans unité) en fonction du facteur d'amortissement z . **Deux valeurs sont à connaître :**

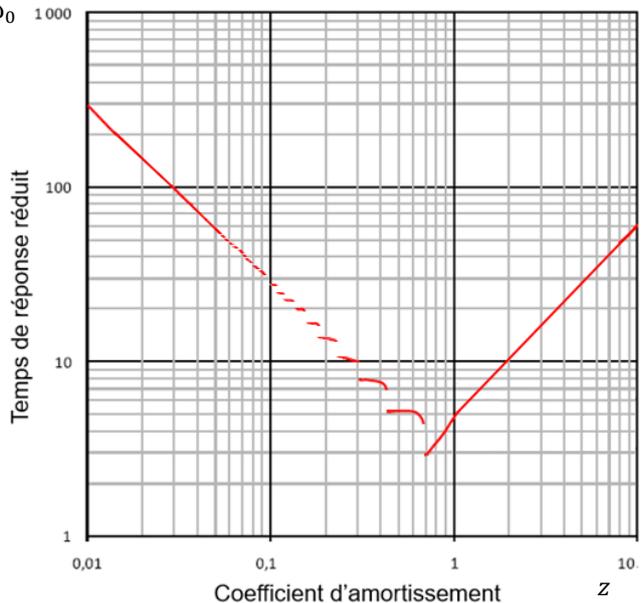
- lorsque $z = 0,69$, $t_{r5\%}\omega_0 \approx 3 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$
- lorsque $z = 1$, $t_{r5\%}\omega_0 \approx 5 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{5}{\omega_0}$

Abaque du temps de réponse réduit

À un facteur d'amortissement $t_{r5\%}\omega_0$ correspond un temps de réponse réduit.

Par conséquent, pour un même facteur z , plus ω_0 augmente, plus $t_{r5\%}$ diminue et donc plus le modèle est rapide⁽⁴⁾.

Exemple : Tracer le temps de réponse réduit pour $z = 0,69$ et $z = 1$.



Bilan

Le **gain statique K** caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** : $\Delta s_\infty = KE_0$.

Le **facteur d'amortissement z** et la **pulsation propre ω_0** caractérisent le comportement du modèle en **régime transitoire** :

- plus z est faible, plus les dépassements sont importants ;
- plus ω_0 est faible, plus la pseudo-période est grande.

7 Identifier un modèle de comportement

Un **modèle de connaissance** est un modèle mathématique déterminé par application de lois et principes de la physique.

Un **modèle de comportement** est déterminé à partir de la courbe de sa réponse expérimentale à un signal test.

7.1 Méthodologie

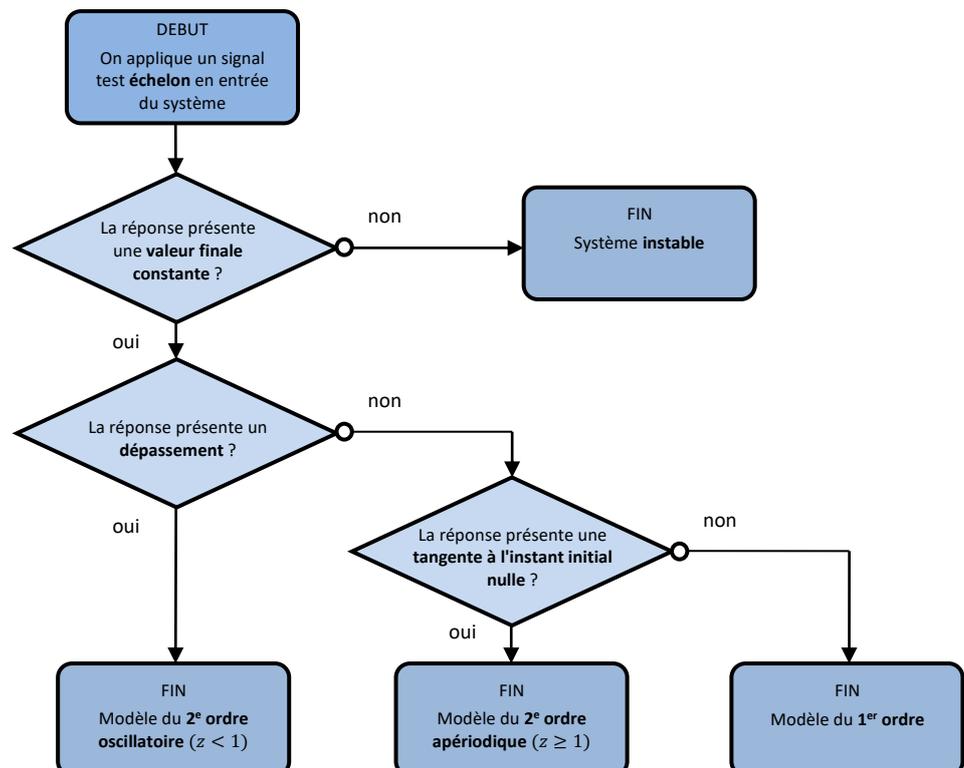
Il est parfois nécessaire, ou utile, de modéliser le comportement d'un système à partir de **résultats expérimentaux**, sans passer par un modèle connaissance. On utilise dans ce cas-là une **méthode d'identification**. Cela consiste à rechercher un modèle en analysant la réponse du système à une entrée test connue, de type échelon dans notre cas.

- Le système est considéré comme une « **boîte noire** ».
- On le soumet à un échelon et on compare les réponses obtenues expérimentalement à un catalogue de réponses types de façon à **choisir un modèle** de comportement (1^{er} ordre, 2^e ordre...).
- On identifie les paramètres de sa fonction de transfert sur les relevés expérimentaux et on établit ainsi un **modèle de comportement** du système.

Cette démarche permet d'obtenir un modèle qu'il convient de valider en comparant des comportements prévus par simulation avec d'autres résultats expérimentaux.

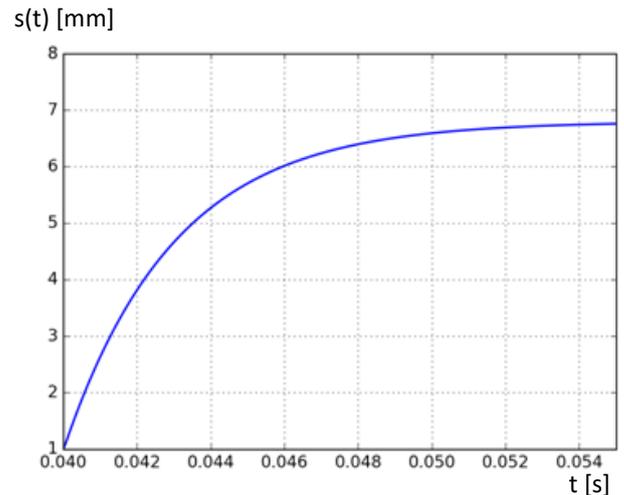
Cette étape de validation permet aussi d'estimer le domaine de validité du modèle.

Au regard des caractéristiques des réponses temporelles à un échelon des modèles du 1^{er} et du 2^e ordre présentées précédemment, la démarche d'identification est proposée ci-dessous :



7.2 Identification temporelle d'un 1^{er} ordre

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $E_0 = 2 \text{ mm}$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre. Proposer une modélisation du système.



Démarche pour un 1^{er} ordre :

Les paramètres caractéristiques d'un modèle du premier ordre sont identifiés ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s_\infty = KE_0$ (attention aux conditions initiales) ;
- τ à partir du relevé de la **durée pour atteindre 63% de la variation totale de la sortie**.

La valeur finale est constante, la tangente à l'instant initial est non nulle, il n'y a pas de dépassements. On identifie donc la courbe avec un modèle du 1^{er} ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Identification de la valeur de K

$$\text{On lit graphiquement } \Delta s_\infty = KE_0 \Rightarrow K = \frac{\Delta s_\infty}{E_0} \approx \frac{5,8}{2} \approx 2,9$$

Identification de la valeur de τ

$$\text{On lit graphiquement } s(\tau) = 0,63\Delta s_\infty \approx 0,63 \cdot 5,8 \approx 3,6 \text{ mm}$$

$$\text{On en déduit l'antécédent } \tau \approx 3 \text{ ms}$$

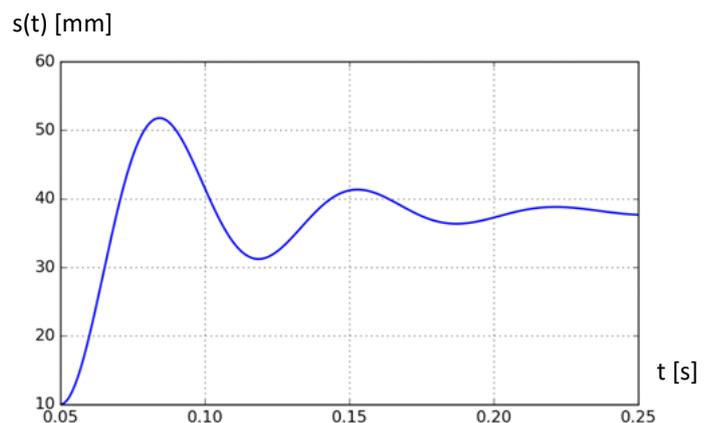
Modèle de comportement

Donc, on peut choisir comme modèle de comportement :

$$H(p) \approx \frac{2,9}{1 + 3 \cdot 10^{-3} p}$$

7.3 Identification temporelle d'un 2^e ordre pseudo-périodique

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $E_0 = 2 \text{ mm}$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre. Proposer une modélisation du système.



Dans le cas d'une **réponse à un échelon avec dépassement**, les caractéristiques du 2^e ordre sont identifiées ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s_\infty = KE_0$ (attention aux conditions initiales) ;
- z à partir du relevé de la valeur du **premier dépassement $D_{1\%}$** et :
en utilisant **l'abaque** qui lie le dépassement au facteur d'amortissement **ou** en utilisant la formule des **dépassements** relatifs :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{1\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{1\%}}}$$

- ω_0 à partir du relevé de la durée de la **pseudo-période T_p** et en utilisant formule de la pseudo-période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$

ou à partir du relevé de la durée $t_{r5\%}$ et en utilisant **l'abaque** qui lie le temps de réponse réduit $t_{r5\%}\omega_0$ et le facteur d'amortissement (mais cette seconde méthode est moins précise).

La valeur finale est constante, la tangente à l'instant initial est nulle, il y a des dépassements. On identifie donc la courbe avec un modèle du 2^e ordre oscillatoire ($z < 1$) :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Identification de la valeur de K

$$\text{On lit graphiquement } \Delta s_\infty = KE_0 \Rightarrow K = \frac{\Delta s_\infty}{E_0} \approx \frac{28}{2} \approx 14$$

Identification de la valeur de z

Méthode 1 : abaque

$$\text{On lit graphiquement } D_1 \approx 52 - 38 \approx 14 \text{ mm}$$

$$D_{1\%} \approx \left| \frac{D_1}{\Delta s_\infty} \right| \approx \frac{14}{28} \approx 0,5 \approx 50\%$$

$$\text{On utilise l'abaque (page 27) } D_{k\%} = f(z) \text{ et on lit graphiquement } z \approx 0,21$$

ou Méthode 2 : formule

$$z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{1\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{1\%}}} \approx \sqrt{\frac{\ln^2 0,5}{\pi^2 + \ln^2 0,5}} \approx 0,21$$

Identification de la valeur de ω_0

Méthode 1 : abaque

$$\text{Bande des 5\%} = [38 - 1,4 ; 38 + 1,4] = [36,6 ; 39,4]$$

$$\text{On lit graphiquement le temps de réponse } t_{r5\%} = 140 \text{ ms}$$

$$\text{On utilise l'abaque (page 28) } t_{r5\%}\omega_0 = f(z) \text{ et on lit graphiquement pour } z \approx 0,21 :$$

$$t_{r5\%}\omega_0 \approx 12 \Rightarrow \omega_0 \approx \frac{12}{t_{r5\%}} \approx \frac{12}{0,140} \approx 86 \text{ rad/s}$$

ou Méthode 2 : formule

$$\text{On lit graphiquement } T_p \approx 70 \text{ ms}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1-z^2}} \approx \frac{2\pi}{0,070 \sqrt{1-0,21^2}} \approx 92 \text{ rad/s}$$

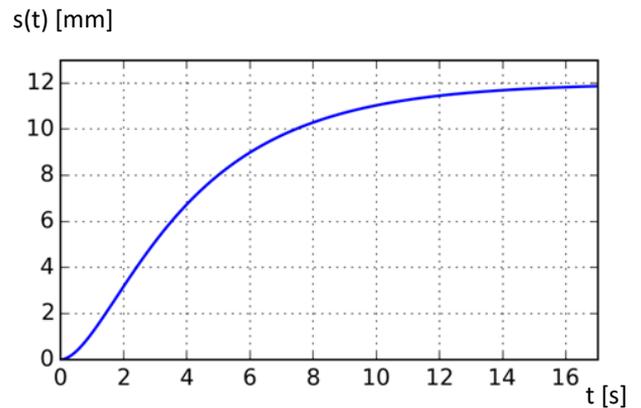
Modèle de comportement

On peut choisir comme modèle de comportement :

$$H(p) = \frac{14}{1 + \frac{2 \cdot 0,21}{92}p + \frac{1}{92^2}p^2}$$

7.4 Identification temporelle d'un 2^e ordre aperiodique

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $E_0 = 2 \text{ mm}$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre. Proposer une modélisation du système.



Identifier le système revient alors dans ce cas à déterminer les valeurs du gain statique K , et des deux constantes de temps τ_1 et τ_2 ⁽¹⁾.

(1) Et non pas les valeurs de z et ω_0 .

Dans le cas d'une **réponse à un échelon sans dépassement**, mais avec **pente nulle à l'instant initial**, les caractéristiques du 2^e ordre sont identifiées en supposant que pour t suffisamment grand, la courbe est assimilable à la réponse d'un **premier ordre de constante de temps τ_2 , avec un retard τ_1** . Les caractéristiques sont déterminées ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s_\infty = KE_0$ (attention aux conditions initiales) ;
- **La tangente au point d'inflexion atteint l'axe des abscisses en τ_1 ;**
- **La tangente au point d'inflexion atteint la valeur finale de la sortie en $\tau_1 + \tau_2$.**

La valeur finale est constante, la tangente à l'instant initial est nulle, il n'y a pas de dépassements. On identifie donc la courbe avec un modèle du 2^e ordre aperiodique ($z \geq 1$):

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Identification de la valeur de K

$$\text{On lit graphiquement } \Delta s_\infty = KE_0 \Rightarrow K = \frac{\Delta s_\infty}{E_0} \approx \frac{12}{2} \approx 6$$

Identification des valeurs de τ_1 et τ_2

On trace la tangente au point d'inflexion. On lit graphiquement

$$\tau_1 \approx 0,5 \text{ s et } \tau_1 + \tau_2 \approx 5 \text{ s} \Rightarrow \tau_2 \approx 4,5 \text{ s}$$

Modélisation de comportement

Donc, on peut choisir comme modèle de comportement :

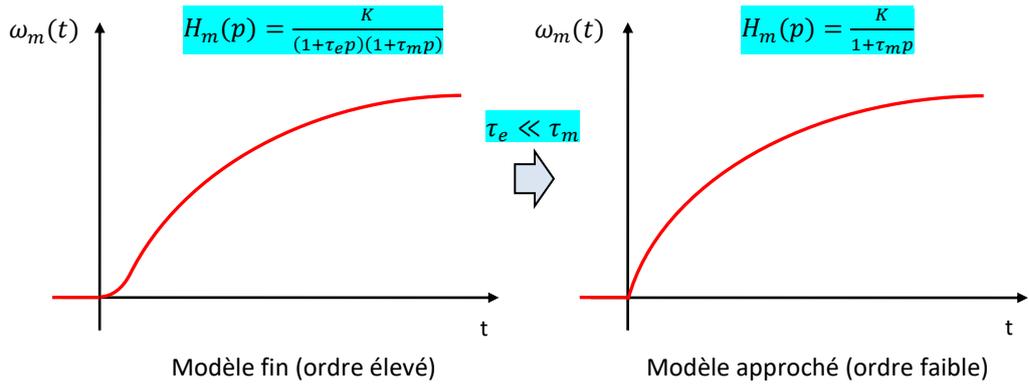
$$H(p) = \frac{K}{(1 + 0,5 p)(1 + 4,5 p)}$$

7.5 Réduction de l'ordre d'un modèle

Plus on **modélise finement** un système réel, plus sa fonction de transfert est d'un **ordre élevé**. En parallèle, on constate que son comportement dynamique reste très voisin de système de fonction de transfert d'ordre inférieur. Si les différences comportementales sont faibles, il peut être intéressant, de substituer au modèle complexe un modèle simplifié, dont l'étude est plus économique.

S'ils sont suffisamment **éloignés des pôles dominants**, les pôles à partie réelle négative peuvent être **négligés**.

Exemple : MCC



(1) Par exemple pour un MCC, on aura $\tau_e \ll \tau_m$.

Très souvent⁽¹⁾ lorsque $z > 1$, on étudiera un système où une constante de temps est **négligeable** devant l'autre $\tau_1 \ll \tau_2$. On est alors en présence d'un pôle dominant et on peut alors se ramener à un modèle du **1^{er} ordre**.

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \approx \frac{K}{1+\tau_2 p}$$

8 Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle (ou harmonique) d'un système s'intéresse à sa réponse à une sollicitation périodique. Elle permet de prévoir son comportement lorsqu'il est soumis à des entrées sinusoïdales, ce qui est indispensable en phase de conception de certains systèmes.

Par ailleurs, comme cela a été mis en œuvre plus tôt dans l'année avec la réponse temporelle à un échelon, la réponse fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant permet aussi d'identifier sa fonction de transfert en vue de lui associer un modèle approché.

Enfin, notons que l'analyse fréquentielle est également à la base des méthodes de conception des correcteurs traitées en 2nd année.

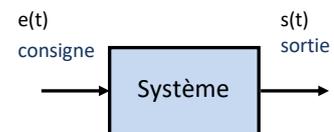


Système dont l'amplitude des oscillations du signal de sortie doit être atténuée.

8.1 Caractéristiques

Soit un système linéaire continu et invariant de grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ caractérisé par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + b_0 e(t)$$



L'expression temporelle de la sortie, solution de l'équation différentielle, est la somme des solutions générales de l'équation sans second membre et d'une solution particulière avec second membre. On note que :

- les solutions générales caractérisent le régime transitoire de la sortie ;
- la solution particulière caractérise le régime permanent de la sortie.

Ces considérations permettent de montrer que :

Pour une **entrée sinusoïdale**, la **sortie** en régime permanent d'un SLCI est aussi un **signal sinusoïdal**.

(1) Appelé aussi réponse forcée ou régime établi.

Tout SLCI, soumis à une **entrée sinusoïdale** d'amplitude E_0 et de pulsation ω , présente une réponse en régime permanent⁽¹⁾ sinusoïdale :

- de même **pulsation** ω [en rad/s] ;
- de **déphasage** φ [en rad ou en °] ;
- d'amplitude S_0 différente.

si $e(t) = E_0 \sin(\omega t) \Rightarrow s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$

À une pulsation ω donnée du signal d'entrée, quelle que soit l'amplitude E_0 du signal d'entrée :

- le rapport $G = \frac{S_0}{E_0}$, appelé **gain** $\left[\frac{\text{unité de sortie}}{\text{unité d'entrée}} \right]$, est **constant** ;
- le déphasage φ , appelé **phase** [°], est aussi **constant**.

Les courbes de gain $G(\omega) = \frac{S_0}{E_0}(\omega)$ et de phase $\varphi(\omega)$ caractérisent alors le comportement fréquentiel du modèle. Une fois connues, elles peuvent donc permettre de prévoir la réponse du modèle à n'importe quelle entrée sinusoïdale.

8.2 Diagramme de Bode

Afin de faciliter l'interprétation des évolutions du gain et de la phase en fonction de ω , on utilise une représentation graphique du comportement fréquentiel.

(1) Le décibel est une unité sans dimension est utilisé pour comparer de grandes plages de variation.

Le 20 sert à comparer des grandeurs d'effort ou de flux.

(2) Attention, car c'est le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ qui est relevé sur le diagramme. Il faut ensuite, à partir de cette valeur, calculer le gain $G(\omega)$.

Le **diagramme de Bode** est constitué de deux courbes tracées l'une en dessous de l'autre en utilisant une échelle logarithmique en abscisse :

- le **diagramme de gain en dB** $G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) \Leftrightarrow G(\omega) = 10^{\frac{G_{dB}(\omega)}{20}}$ ⁽¹⁾ ;
- le **diagramme de phase** $\varphi(\omega)$, avec $\varphi(\omega)$ en radian ou en degré.

Par lecture du digramme de Bode, on peut déterminer l'expression du signal de sortie :

$$s(t) = E_0 G(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$
 ⁽²⁾

Exemple : Donner la réponse temporelle du système ci-contre lorsqu'il est soumis à une entrée $e(t) = 10 \sin(40t)$.

On lit graphiquement pour $\omega = 40 \text{ rad/s}$:

$$G_{dB}(40) = 20 \log G = -12 \text{ dB}$$

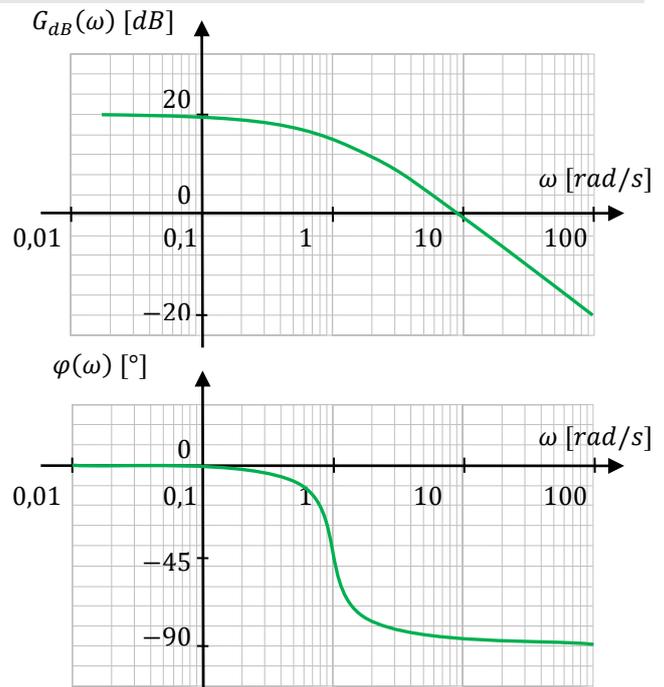
$$\Rightarrow G = 10^{\frac{-12}{20}} = 0,25$$

et

$$\varphi(40) = -90^\circ$$

On a donc

$$s(t) = 2,5 \sin(40t - \frac{\pi}{2})$$



Pour bien appréhender un diagramme de Bode, il est nécessaire de connaître certaines de ces particularités :

- l'écart entre ω et 10ω est appelé une **décade** ;
- sur l'échelle logarithmique, il n'y a **pas d'origine** des abscisses (pas de 0) et le tracé ne concerne qu'une plage de pulsations judicieusement choisie sur 3 ou 4 décades ;
- un gain de **0 dB** correspond à un **gain de 1**, soit E_0 et S_0 de même amplitude ;
- un **gain en dB positif** correspond à $S_0 > E_0$;
- un **gain de 0 dB** correspond à $S_0 = E_0$;
- un **gain en dB négatif** correspond à $S_0 < E_0$;
- **20dB** = $20 \log(10)$ correspond à un gain de 10, soit $S_0 = 10E_0$, $-20dB$ à un gain de $1/10$.

8.3 Gain et phase

Les équations des courbes de gain et de phase d'un système peuvent être déterminées à partir de sa fonction de transfert.

Pour l'analyse fréquentielle, la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ est obtenue à partir de la fonction de transfert $H(p)$ **en remplaçant p par $j\omega$** :

$$H(p) = H(j\omega)$$

Le **gain** $G(\omega)$ et la **phase** $\varphi(\omega)$ s'obtiennent à partir de la **fonction de transfert complexe** $H(j\omega)$ avec :

$$\boxed{G(\omega) = |H(j\omega)|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))}$$

module de la FT complexe argument de la FT complexe

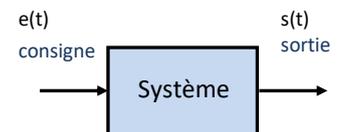
Le **gain en décibel** $G_{dB}(\omega)$ s'obtient à partir de la **fonction de transfert complexe** $H(j\omega)$ avec :

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = 20 \log|H(j\omega)|}$$

Démonstration : relation entre $G(\omega)$ et $|H(j\omega)|$, relation entre $\varphi(\omega)$ et $\arg(H(j\omega))$

Soit un système linéaire continu et invariant de grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ caractérisé par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + b_0 e(t)$$



Pour déterminer la solution de l'équation différentielle linéaire, on pose les variables complexes : $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{S} = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ avec $e(t) = \text{Im}(\underline{E})$ et $s(t) = \text{Im}(\underline{S})$.

Les variables complexes vérifient l'équation différentielle :

$$a_n \frac{d^n \underline{S}}{dt^n}(t) + \dots + a_0 \underline{S}(t) = b_m \frac{d^m \underline{E}}{dt^m}(t) + \dots + b_0 \underline{E}(t)$$

$$\Rightarrow a_n (j\omega)^n \underline{S} + \dots + a_0 \underline{S} = b_m (j\omega)^m \underline{E} + \dots + b_0 \underline{E}$$

donc

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0}$$

On reconnaît la fonction de transfert du système où la variable de Laplace p a été remplacée par $j\omega$.

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi} = G(\omega) e^{j\varphi}$$

De ces observations, on déduit que : $H(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi}$

8.4 Filtre, pulsation de coupure et bande passante

(1) Cela peut être voulu ou une conséquence des limites de la technologie utilisée.

(2) C'est-à-dire son domaine de fréquence efficace.

Un certain nombre de systèmes sont conçus⁽¹⁾ tels que, en dehors d'une plage de pulsation, le signal de sortie est atténué. Cela implique que, si les variations de l'entrée se font à une fréquence en dehors de la plage en question, le système ne peut les suivre et la sortie est quasiment inexistante car fortement atténuée.

On appelle **bande passante** l'intervalle de pulsations pour lequel le signal d'entrée est atténué d'une valeur définie.

- en électronique : intervalle de pulsations pour lequel le gain est supérieur au gain statique -3 dB ;
- en automatique : la **bande passante à -3 dB**, notée $BP_{-3dB} = [0, \omega_{-3dB}]$, caractérise la rapidité du système **pour la FTBF**. Pour obtenir une bonne approximation de la rapidité, on peut aussi utiliser la **bande passante à 0 dB pour la FTBO**, $BP_{0dB} = [0, \omega_{0dB}]$, c'est-à-dire l'intervalle de pulsations pour lequel $G_{dB}(\omega) \geq 0$.

Elle caractérise ainsi la qualité⁽²⁾ du système.

La bande passante du filtre est délimitée par des **pulsations de coupure**.

Les pulsations de coupure sont définies à partir d'un gain de référence. Il existe plusieurs façons de les définir, nous retiendrons :

Définition	Méthode analytique	Méthode graphique
ω_{c-3dB} : pulsation de coupure à -3 dB Pulsation à partir de laquelle le gain est atténué de 30% par rapport à une valeur de référence G_{ref}	$G(\omega_{c-3dB}) = 70\%G_{ref}$ $= 0,7G_{ref}$	$G_{dB}(\omega_{c-3dB}) = 20\log G_{ref} + 20\log 0,7$ $= G_{ref\ dB} - 3dB$
ω_{c-6dB} : pulsation de coupure à -6 dB Pulsation à partir de laquelle le gain est atténué de 50% par rapport à une valeur de référence G_{ref}	$G(\omega_{c-6dB}) = 50\%G_{ref}$ $= 0,5G_{ref}$	$G_{dB}(\omega_{c-6dB}) = 20\log G_{ref} + 20\log 0,5$ $= G_{ref\ dB} - 6dB$

NB : pour des filtres passe-bas $G_{ref} = K$ et $G_{ref\ dB} = 20 \log K$

Filtre passe-bande		$BP_{-3dB} = [\omega_{c-3dB1}, \omega_{c-3dB2}]$
Filtre passe-bas		$BP_{-3dB} = [0, \omega_{c-3dB}]$
Filtre passe-haut		$BP_{-3dB} = [\omega_{c-3dB}, +\infty[$

8.5 Stabilité à partir du diagramme de Bode

Un système stable a nécessairement sa classe nulle.

Si le système est stable, le diagramme de Bode aura une asymptote en dB aux basses fréquences horizontale. Et donc :

$$G_{dB}(0) \neq \infty$$

8.6 Rapidité à partir du diagramme de Bode

Un système avec une large bande passante est apte à suivre des entrées rapides ou des fréquences élevées.

Ainsi, une large bande passante caractérise un système rapide.

8.7 Précision à partir du diagramme de Bode

Ainsi, si on suppose un système stable (donc nécessairement de classe 0) et précis, ce dernier aura un gain statique K égal à 1.

Si le système est précis, alors $K = 1$, donc $G_{dB}(0) = 20 \log K = 20 \log 1 = 0dB$

Si le système est précis alors le diagramme de Bode aura une asymptote en dB aux basses fréquences égale à 0 dB.

9 Réponse fréquentielle

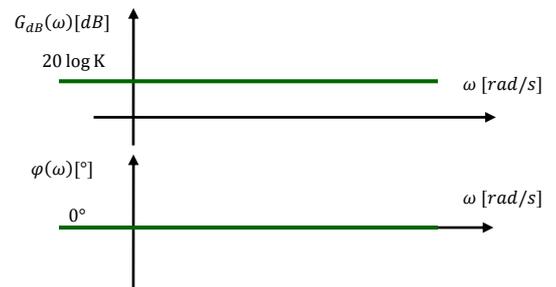
Les réponses fréquentielles des fonctions usuelles⁽¹⁾ sont les suivantes.

(1) Ils pourront être ensuite utilisés sans démonstration.

9.1 Modèle proportionnel

$$H(p) = K \Rightarrow H(j\omega) = K \quad \text{avec} \quad K > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log K \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$



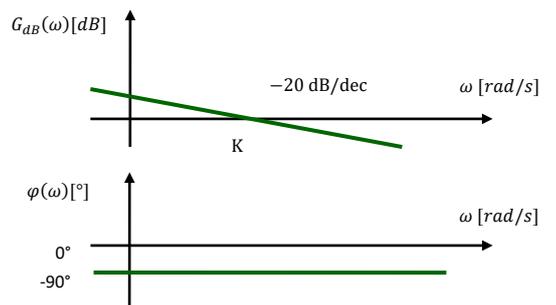
9.2 Modèle intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

On a donc une pente de -20 dB/dec .

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega = 0dB \Rightarrow \omega = K$$

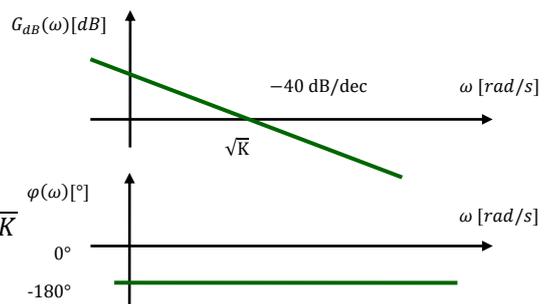


9.3 Modèle intégrateur de degré 2

$$H(p) = \frac{K}{p^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = -\frac{K}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 40 \log \omega \\ \varphi(\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 40 \log \omega = 0dB \Rightarrow \omega = \sqrt{K}$$

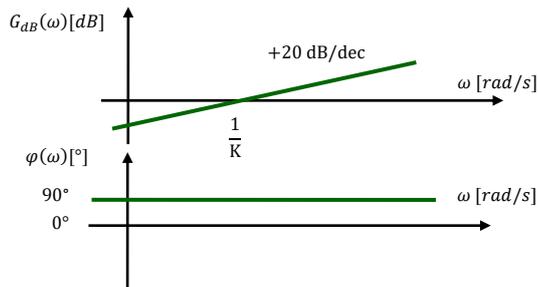


9.4 Modèle dérivateur

$$H(p) = Kp \Rightarrow H(j\omega) = K j\omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \omega \\ \varphi(\omega) = +90^\circ \end{cases}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \omega = 0dB \Rightarrow \omega = \frac{1}{K}$$



9.5 Modèle du 1^{er} ordre

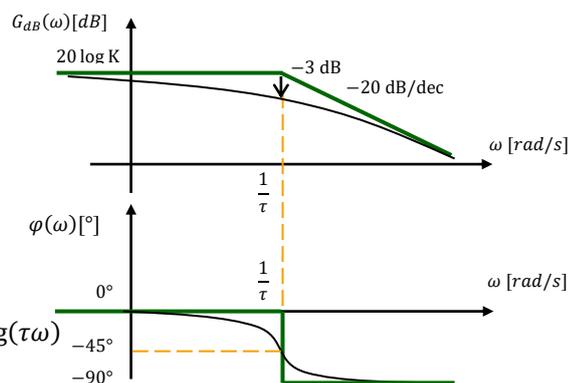
$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p} = \frac{K}{1+j\tau\omega}$$

Comportement asymptotique

$$BF: \lim_{\omega \rightarrow 0^+} H(j\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

HF :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(j\omega) = \frac{K}{j\tau\omega} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(\tau\omega) \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



La **pulsation de cassure** ω_c correspond à la pulsation du **point d'intersection des asymptotes**.

$$20 \log K = 20 \log K - 20 \log \tau\omega_c \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

On a également $\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$

Comportement réel

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arg(1 + j\tau\omega) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

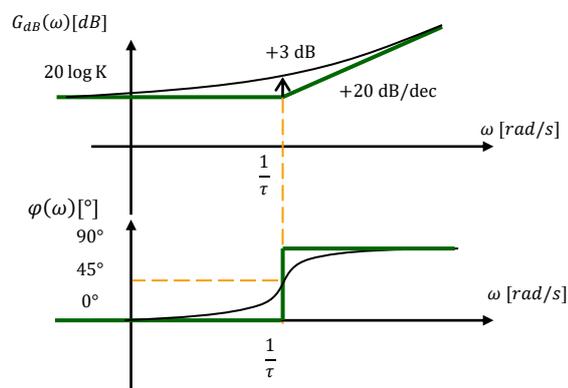
$$H(j\omega_c) = \frac{K}{1 + j\tau \frac{1}{\tau}} = \frac{K}{1 + j} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3dB \\ \varphi(\omega_c) = -\arg(1 + j) = -45^\circ \end{cases}$$

9.6 Modèle du 1^{er} ordre inverse

$$H(p) = K(1 + \tau p) = K(1 + j\tau\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi(\omega) = \arg(1 + j\tau\omega) = \arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

Par analogie avec l'étude précédente :



9.7 Modèle du 2^e ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2z\omega}{\omega_0}}$$

Comportement asymptotique

BF : $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} H(j\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$

HF : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(j\omega) = \frac{K}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega) \\ \varphi(\omega) = -180^\circ \end{cases}$

$20 \log K = 20 \log K + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega_c) \Rightarrow \omega_c = \omega_0$

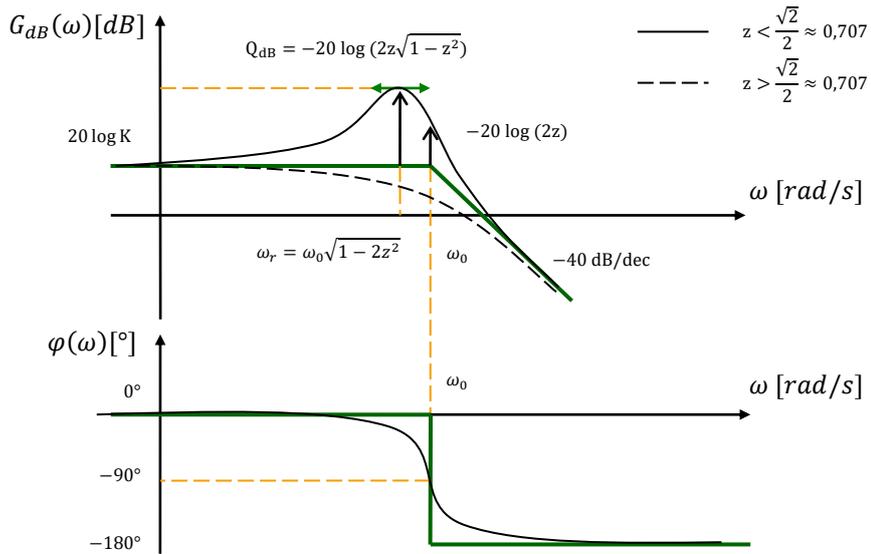
Comportement réel

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\frac{2z\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) [+180^\circ \text{ si } \omega > \omega_0] \end{cases}$$

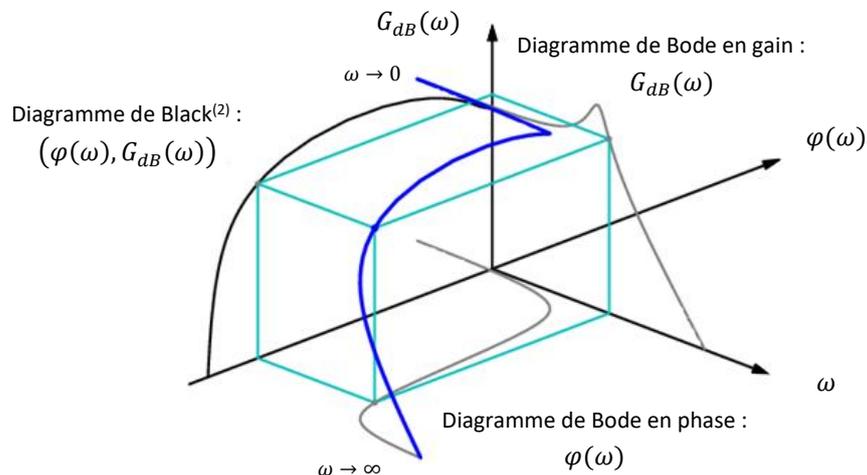
$H(j\omega_0) = \frac{K}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} + j \frac{2z\omega_0}{\omega_0}} = \frac{K}{j2z} = -j \frac{K}{2z} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K - 20 \log 2z \\ \varphi(\omega_0) = -90^\circ \end{cases}$ ⁽¹⁾

(1) $-20 \log 2z$ peut être positif $z < 0,5$ ou négatif $z > 0,5$.

si $z < 1$:



On appelle lieu de transfert le lieu des points de coordonnées $(\omega, \varphi(\omega), G_{dB}(\omega))$. On peut le tracer :



(2) Le diagramme de Black est hors programme.

Résonance, pulsation de résonance et facteur de surtension

Pour certaines valeurs du facteur d'amortissement z , la courbe de gain peut présenter un extrémum :

(1) A ne pas confondre avec la pseudo-pulsation :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

Pour $0,707 < z < 1$, la réponse temporelle à un échelon présente des dépassements, mais la réponse fréquentielle ne présente pas de résonance.

(2) Avec Q le coefficient de surtension :

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j0)|} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

- si $z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, la courbe de gain présente un maximum pour la pulsation de résonance ω_r ⁽¹⁾

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K \boxed{-20 \log(2z)}$$

$$G_{dB}(\omega_r) = 20 \log K \underbrace{-20 \log(2z\sqrt{1-z^2})}_{Q_{dB}^{(2)}} \text{ avec } \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2z^2}}$$

Le facteur de surtension en dB Q_{dB} varie de 0 à $+\infty$ quand z varie de 0,707 à 0.

La pulsation de résonance ω_r varie de 0 à ω_0 quand z varie de 0,707 à 0.

- si $z > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ alors la courbe de gain est strictement décroissante, **il n'y a pas de résonance.**

Démonstration de l'existence d'une pulsation de résonance :

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2} \right) \end{aligned}$$

en posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite,

Un extrémum de $G_{dB}(\omega)$ existe si $P(u) = (1-u^2)^2 + 4z^2u^2$ a un extrémum, soit si $\frac{dP}{du}(u) = 0$.

Avec $\frac{dP}{du}(u) = 2(-2u)(1-u^2) + 4z^2 \cdot 2u = 4u(2z^2 - 1 + u^2)$,

$$\frac{dP}{du}(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \text{ soit } (\omega = 0) \Rightarrow \text{impossible en régime fréquentiel} \\ u^2 = 1 - 2z^2 \Rightarrow \text{possible si } 1 - 2z^2 > 0 \text{ soit } z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \end{cases}$$

et pour $u = \sqrt{1-2z^2}$ soit $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2z^2}$,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega_r) &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{(2z^2)^2 + 4z^2(1-2z^2)} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{4z^2(z^2 + 1 - 2z^2)} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log(2z\sqrt{1-z^2}) \end{aligned}$$

$\varphi(\omega_r)$ n'est pas une valeur particulière.

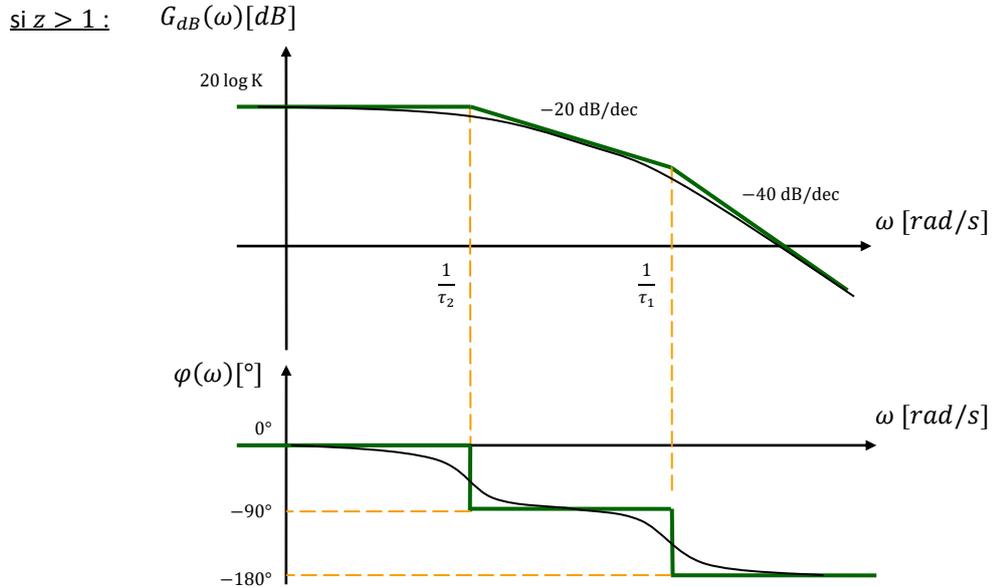
Cas particulier où $z > 1$

$$\text{Pour } z > 1, H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}$$

qui est un **produit de 2 fonctions de transfert du 1^{er} ordre** de constantes de temps τ_1 et τ_2 .

Leurs diagrammes de Bode s'additionnent.

Si $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2}$ ont **plus qu'une décade** de différence, les deux diagrammes réels influent peu l'un sur l'autre.



9.8 Cas général

Propriétés des diagrammes de Bode

Les **modules en dB** et les **arguments en degrés s'ajoutent** quand les fonctions de transfert se **multiplient**.⁽¹⁾

(1) Si la distance qui sépare les différentes pulsations de cassure est trop faible (<1 décade) les courbes réelles se chevauchent.

9.9 Méthodologie

Méthode de tracé d'un diagramme de Bode

Étape n°1 : mettre la **fonction de transfert** sous la forme d'un **produit de fonctions usuelles** → intégrateurs d'ordre α puis 1^{er} et 2^e ordre, 1^{er} et 2^e ordre inverses...

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_m (1 + \tau_m p)}{\prod_n (1 + \tau_n p)} \cdot \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2z_i}{\omega_{0i}} p + \frac{1}{\omega_{0i}^2} p^2\right)}{\prod_j \left(1 + \frac{2z_j}{\omega_{0j}} p + \frac{1}{\omega_{0j}^2} p^2\right)}$$

Labels in the diagram:
 - Gain statique: K
 - Intégrateur de classe α : p^α
 - Produit de 1^{er} ordre inverse: $\prod_m (1 + \tau_m p)$
 - Produit de 1^{er} ordre: $\prod_n (1 + \tau_n p)$
 - Produit de 2^e ordre inverse: $\prod_i \left(1 + \frac{2z_i}{\omega_{0i}} p + \frac{1}{\omega_{0i}^2} p^2\right)$
 - Produit de 2^e ordre: $\prod_j \left(1 + \frac{2z_j}{\omega_{0j}} p + \frac{1}{\omega_{0j}^2} p^2\right)$

Regrouper les gains statiques K de toute la fonction de transfert $H(p)$.

Étape n°2 : classer les **pulsations de cassure** ($\frac{1}{\tau}$ pour un 1^{er} ordre et ω_0 pour un 2^e ordre) correspondantes dans un **ordre croissant**.

Étape n°3 :

- on trace **en couleur** les différents **diagrammes asymptotiques** des fonctions de bases en notant les pulsations de cassure ;
- on trace **en couleur** la fonction totale en notant les pentes, la valeur des asymptotes horizontales ;

Étape n°4 : tracer l'allure de la **courbe réelle** en plaçant certains **points particuliers connus** ou **déterminés** à l'aide de la **calculatrice**.

Méthode pour identifier un diagramme de Bode

Étape n°1 : tracer l'asymptote BF de la courbe G_{dB}

- si celle-ci est **horizontale**, le modèle de comportement ne contiendra pas de dérivateur ou d'intégrateur. On détermine K avec $G_{dB} = 20 \log K$.
- si celle-ci est **décroissante ou croissante**, le modèle de comportement contiendra un intégrateur ou un dérivateur. La pente permet de déterminer la classe ($-20dB/dec \Rightarrow \alpha = 1, -40dB/dec \Rightarrow \alpha = 2, \dots$). Cette asymptote BF coupe l'axe des $0dB$ en $K, \sqrt{K},$ ou $\frac{1}{K} \dots$

Étape n°2 : tracer les tangentes à la courbe G_{dB}

Chaque tangente correspondra à un modèle du 1^{er} ordre ou du 2^e ordre à ajouter au modèle de comportement.

Déterminer les pulsations de cassures avec les intersections, si celles-ci sont éloignées d'au moins 1 décade ($\frac{1}{\tau}$ pour un 1^{er} ordre et ω_0 pour un 2^e ordre)

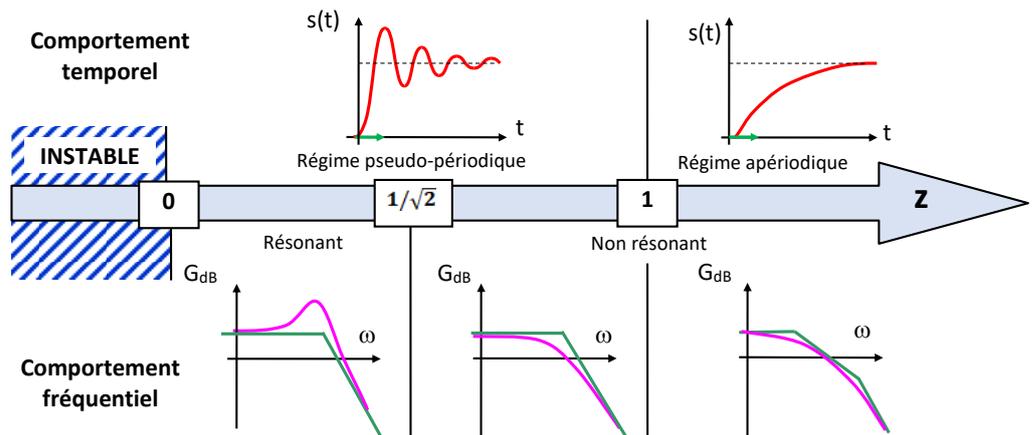
Les asymptotes de la phase sont des multiples de 90° .

Étape n°3 : relever la valeur de G_{dB} aux pulsations de cassures des 2^e ordres

Cette valeur, $-20\log(2z)$, permet de déterminer la valeur de z .

9.10 Bilan du comportements temporel et fréquentiel d'un modèle du 2^e ordre

Facteur d'amortissement



Gain

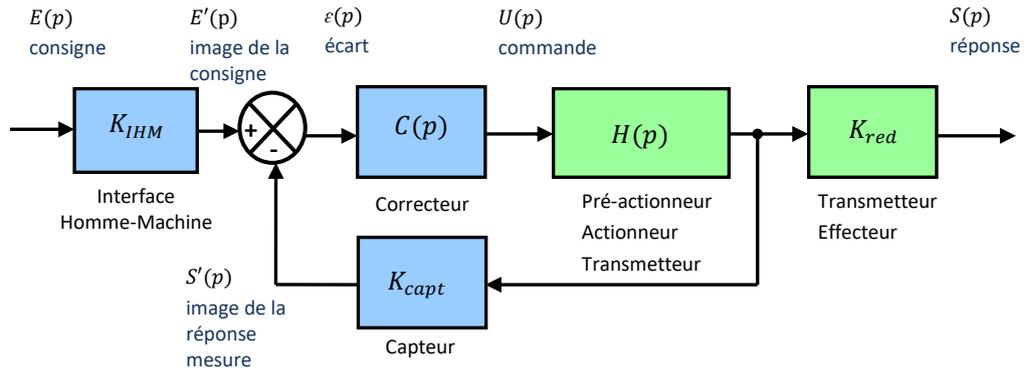
Temporel	Gain statique	K	Régime permanent	$\Delta s_\infty = KE_0$
Fréquentiel	Gain	$G(\omega)$	Amplification (> 1) ou atténuation (< 1)	$G(\omega) = H(j\omega) $
	Gain en décibel	$G_{dB}(\omega)$	Amplification (> 0) ou atténuation (< 0)	$G_{dB}(\omega) = 20 \log H(j\omega) $

Pulsations

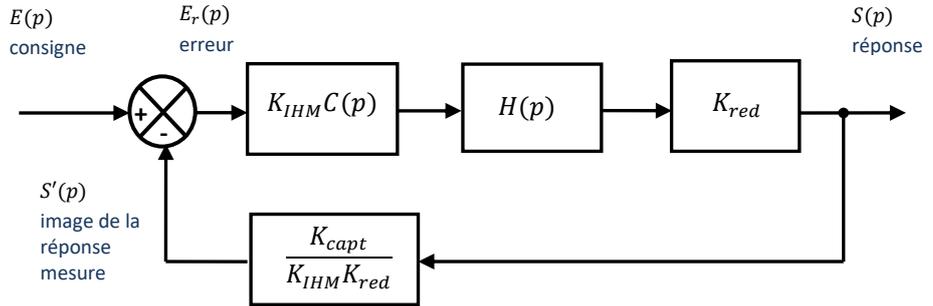
				Ordre 1	Ordre 2
Temporel	Pulsation propre	ω_0	Paramètre caractéristique	–	ω_0
	Pseudo-pulsation	ω_p	Pulsation du régime oscillatoire amorti	–	Si $z < 1$ $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$
Fréquentiel	Pulsation de cassure	$\omega_{cassure}$	Changement de pente asymptotique	$\frac{1}{\tau}$	ω_0
	Pulsation de coupure	ω_{c-3dB}	Bande passante à 70%	$\frac{1}{\tau}$	Valeur quelconque
	Pulsation de résonance	ω_r	Résonance	–	Si $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$

9.11 FTBO et FTBF

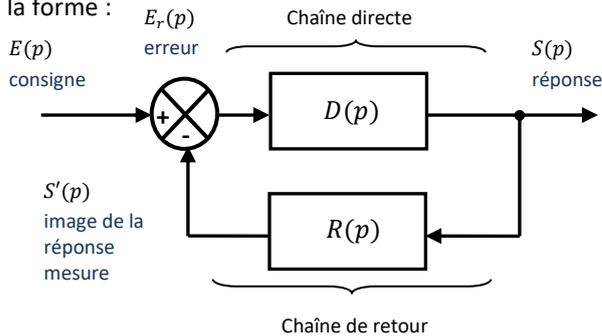
On considère un système asservi non perturbé à une entrée dans le cas générale.



On peut faire la transformation suivante :



Le schéma est donc de la forme :



Lorsque l'on fait des transformations de schéma bloc, on s'éloigne de la réalité technologique du système. Cependant, avec cette écriture, l'écart est égal à l'erreur. Plus l'écart est petit, plus le système est précis.

9.12 Conditions de stabilité – critère graphique

On considère un système asservi, sa FTBF est de la forme :

$$FTBF(p) = \frac{D(p)}{1 + R(p)R(p)} = \frac{D(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Pour déterminer si le système est stable, on s'intéresse aux pôles.

Point critique

$$1 + FTBO(p) = 0 \Rightarrow FTBO(p) = -1$$

Etudier les pôles de divergence, les racines du dénominateur, revient à étudier quand la FTBO⁽²⁾ s'approche du point critique -1.

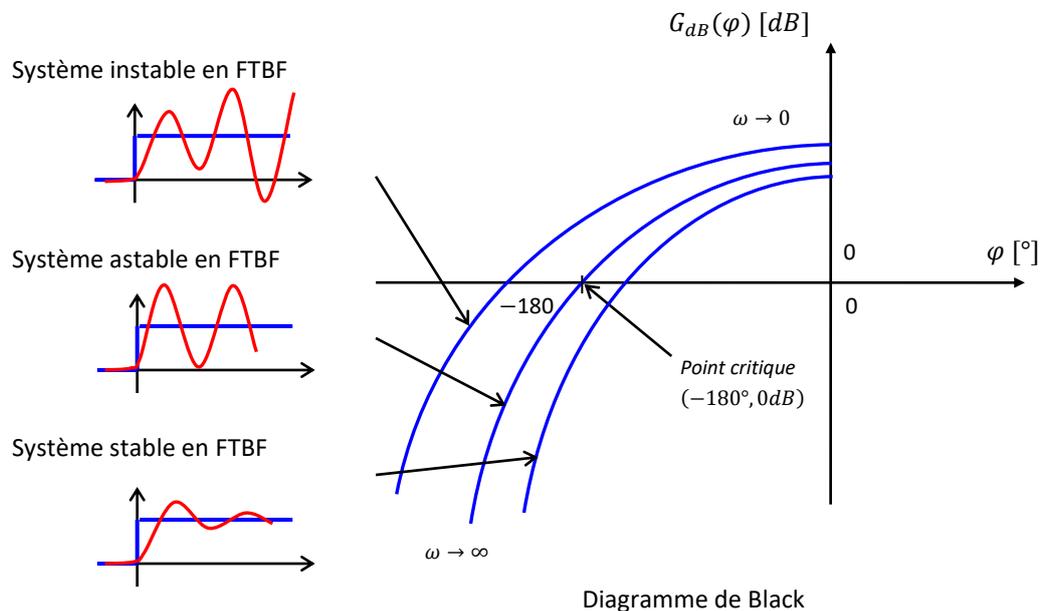
Si le dénominateur s'approche de 0, la FTBF devient très grande. Ce point critique correspond donc à un lieu d'instabilité que l'on doit éviter pour garantir la stabilité du système.

On appelle **point critique** le nombre -1 dans l'espace des complexes, il s'agit du point de coordonnées (-180°, 0dB) dans le plan de Black.

(2) On obtient donc des informations sur la stabilité de la FTBF à partir de l'étude de la FTBO !

Critère du revers dans le plan de Black – hors programme

Un système asservi, dont la FTBO n'admet que des pôles à partie réelle négative ou nulle, est stable en boucle fermée si et seulement si le lieu de Black de sa FTBO parcouru dans le sens des **pulsations croissantes** laisse le point critique sur sa **droite**.



Un système stable en FTBO peut devenir instable en FTBF.

D'autre part, on constate qu'une augmentation du gain de la FTBO la rapproche du point critique et donc de l'instabilité.

9.13 Marge de phase et marge de gain des systèmes asservis

Un système est asservi pour que son fonctionnement soit conforme à des attentes définies dans un cahier des charges. Celui-ci demande souvent de rester éloigné du point critique.

Les systèmes sont rarement invariants, ils présentent du vieillissement (usures...) ainsi que des non-linéarités comme des saturations, des retards, du pompage, des frottements... Un système stable peut s'altérer au fil du temps et devenir instable.

D'autre part, un système stable mais trop oscillant n'est pas souhaitable.

On prévoit donc des marges de sécurité par rapport à ses états non désirables. La FTBO doit rester éloigné du point critique -1 .

On appelle **marge de phase** d'un système asservi la distance entre le point critique et le point de sa FTBO pour lequel le gain vaut 0 dB.

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180^\circ = \arg(H_{FTBO}(j\omega_{0dB})) + 180^\circ$$

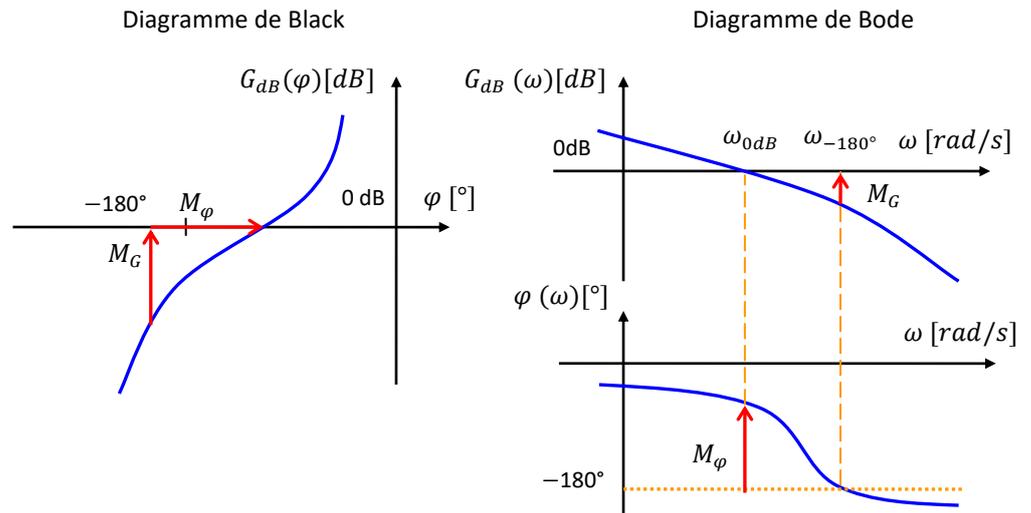
avec ω_{0dB} tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 20 \log|H_{FTBO}(j\omega_{0dB})| = 0$ dB

On appelle **marge de gain** d'un système asservi la distance entre le point de sa FTBO pour lequel la phase vaut -180° et le point critique.

$$M_G = -G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) = -20 \log|H_{FTBO}(j\omega_{-180^\circ})|$$

avec ω_{-180° tel que $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = \arg(H_{FTBO}(j\omega_{-180^\circ})) = -180^\circ$

En général, le CdCF stipule : $M_\varphi \geq 45^\circ$ à 60° et $M_G \geq 8$ à 12 dB



Les systèmes du 1^{er} ou du 2^e ordre sont donc **toujours stable**. On a une **marge de gain infinie** et une **marge de phase positive**.

$$M_\varphi \geq 0^\circ \text{ et } M_G = +\infty$$

On doit obligatoirement avoir $\omega_{-180^\circ} > \omega_{0dB}$ sinon M_G n'est pas définie. La marge de phase doit donc être déterminé en première.

Méthodologie

Pour déterminer M_φ :

- Rechercher graphiquement la pulsation ω_{0dB} ;
- Pour la pulsation ω_{0dB} déterminer M_φ .

Pour déterminer M_G :

- Rechercher graphiquement la pulsation ω_{-180° ;
- Pour la pulsation ω_{-180° déterminer M_G .

QUESTIONS DE COURS

- citer les 4 signaux test utilisés pour évaluer les performances des systèmes continus ;
- citer les 3 types de performances évaluées sur les systèmes continus, ainsi que les critères permettant de les mesurer ;
- donner les expressions du dépassement absolu et du dépassement relatif ;
- donner la définition du temps de réponse à 5% ;
- donner les définitions de l'erreur et de l'erreur statique, absolue et relative.
- indiquer l'intérêt d'utiliser la transformée de Laplace ;
- à quel rapport correspond la fonction de transfert d'un système ou d'un constituant ? Donner sa forme générale en précisant gain statique, classe et ordre ;
- donner la méthode permettant d'obtenir cette forme pour une fonction de transfert ;
- donner la condition fondamentale de stabilité ;
- quel type de pôle génère des oscillations ;
- donner le théorème de la valeur finale, et celui de la valeur initiale ;
- donner les transformées de Laplace des entrées tests ;
- donner la valeur de l'erreur statique absolue et relative d'un modèle stable non perturbé soumis à un échelon ;
- donner la valeur finale d'un modèle stable non perturbé soumis à un échelon ;
- qu'est-ce qu'un système asservi ?
- représenter la structure générale d'un schéma-bloc d'une grandeur asservie ;
- expliquer chaîne directe et chaîne de retour ;
- donner la relation entre les fonctions de transfert de l'IHM et du capteur ;
- expliquer la simplification de blocs en série, en parallèle, en boucle fermée.
- représenter la structure générale d'un schéma-bloc d'une grandeur asservie perturbée ;
- par quoi se traduit une équation à 3 variables dans un schéma-bloc ?
- comment détermine-t-on la sortie d'un modèle à n entrées ?
- un système asservi est-il toujours bouclé ? La réciproque est-elle vraie ? Donner un exemple.
- donner les fonctions de transfert des modèles proportionnel, dérivateur et intégrateur puis donner les graphes représentant leur réponse à un échelon ;
- donner la fonction de transfert d'un modèle du 1^{er} ordre ainsi que ses paramètres caractéristiques, puis donner le graphe représentant sa réponse à un échelon. Indiquer les points caractéristiques sur ce graphe (temps de réponse, variation totale de la sortie) ;
- donner la fonction de transfert d'un modèle du 2^e ordre ainsi que ses paramètres caractéristiques, puis donner le graphe représentant sa réponse temporelle à un échelon. Indiquer les points caractéristiques sur ce graphe (variation totale de la sortie...) ;
- dans quel cas la sortie d'un modèle du 2^e ordre présente-t-elle des oscillations amorties ?
- combien y a-t-il de dépassement >1% pour le cas $z=0,69$? Donner leur valeur ?
- donner l'expression qui permet de quantifier un dépassement relatif ;
- donner les expressions de la période et de la pseudo-pulsation pour un 2^e ordre dont la réponse est oscillatoire amortie ;
- à quels instants, les 3 premiers dépassements s'effectuent pour un 2^e ordre dont la réponse est oscillatoire amortie ?
- on désire un temps de réponse le plus faible possible pour un modèle du 2^e ordre. Que faut-il faire ? 2 cas sont à envisager ;
- comment détermine-t-on le temps de réponse pour un modèle du 2^e ordre ?
- que vaut le temps de réponse réduit pour $z=0,69$ et $z=1$? Quel est son unité ?
- donner la fonction de transfert d'un modèle à retard.
 - expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement du 1^{er} ordre ;
 - expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement du 2^e ordre oscillatoire ;
 - expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement du 2^e ordre apériodique.
- donner les caractéristiques d'un comportement fréquentiel ;
- donner les méthodes analytique et graphique permettant d'obtenir la(les) pulsation(s) de coupure à -3dB.
- comment peut-on évaluer les comportements en stabilité, rapidité et précision par lecture d'un diagramme de Bode ?
- donner les diagrammes de Bode des fonctions de transfert des systèmes proportionnel, intégrateur, intégrateur double, dérivateur, dérivateur double, 1^{er} ordre et 2^e ordre. Indiquer les points caractéristiques sur ces graphes.
- expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement à partir d'un diagramme de Bode.